Data:

CLASA A X-A

SETUL 2
ALGEBRĂ X, partea 2

Prof. Ovidiu Bădescu

Colegiul Național
"Traian Lalescu", Reșița
An școlar

FUNCȚII INJECTIVE, SURJECTIVE, BIJECTIVE

ECUAȚII ȘI INECUAȚII IRAȚIONALE

ECUAȚII ȘI INECUAȚII EXPONENȚIALE

ECUAȚII ȘI INECUAȚII LOGARITMICE

PERMUTĂRI, ARANJAMENTE, COMBINĂRI

BINOMUL LUI NEWTON

PROBABILITĂȚI

MATEMATICI FINANCIARE

Nivel 0: pag
Nivel *: pag
Nivel **: pag
Nivel ***: pag

TOTAL: pag

FUNCȚII INJECTIVE

sunt mai multe metode

1) f injectivă $\Leftrightarrow$

$(\forall x_1, x_2 \in D_f$ cu $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2)$

sau

2) f injectivă $\Leftrightarrow$

($\forall y \in Cd_f$, ec. $f(x)=y$ are cel mult o soluție $x \in D_f$)

sau

3) f injectivă $\Leftrightarrow$

($\forall y \in Cd_f$, paralele prin y la Ox $\cap G_f$ în cel mult 1 pct $x \in D_f$)

Obs 1.: dacă încercăm să arătăm că f e injectivă cu metodele anterioare și nu iese, trebuie să dăm un contraexemplu, așadar

f NU E INJECTIVĂ $\Leftrightarrow$

$\exists x_1 \neq x_2 \in D_f$ cu $f(x_1)=f(x_2)$ sau

$\exists y \in Cd_f$ cu ec. $f(x)=y$ are cel puțin două soluții $x \in D_f$ sau

$\exists y \in Cd_f$ cu // prin y la Ox $\cap G_f$ în cel puțin 2 puncte

Obs 2: metoda 3, cea cu paralele la Ox nu prea e punctată maxim

---

Exp 1: $f:(1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$

studiați injectivitatea lui f

met I: $\forall x_1, x_2 \in (1,\infty)$ cu $f(x_1)=f(x_2)$

$\Rightarrow 3x_1+1=3x_2+1 \Rightarrow 3x_1=3x_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow f$ injectivă

met II: $\forall y \in \mathbb{R}$, ec. $f(x)=y \Leftrightarrow$

$3x+1=y \Rightarrow x=\frac{y-1}{3}$

dacă $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{y-1}{3} \in \mathbb{R}$

și dacă $x=\frac{y-1}{3} \in (1,\infty) \Rightarrow$ soluție

dacă $x=\frac{y-1}{3} \notin (1,\infty) \Rightarrow$ nu e soluție

$\Rightarrow$ ec are cel mult o soluție $x \in D_f$

$\Rightarrow f$ injectivă

Exp 2: $f:(-\infty,0] \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

Studiați injectivitatea lui f

met I: $\forall x_1, x_2 \in (-\infty,0]$ cu $f(x_1)=f(x_2)$

$\Rightarrow (x_1)^2=(x_2)^2 \Rightarrow x_1=\pm x_2$ și cum

$x_1, x_2 \in (-\infty,0] \Rightarrow$ au același semn

$\Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow f$ inj

met II: $\forall y \in \mathbb{R}$ ec. $f(x)=y \Leftrightarrow x^2=y$

$y \geq 0$: $x=\pm\sqrt{y}$ sau; $x \in (-\infty,0]$ $\Rightarrow$ $x=-\sqrt{y}$ sau $\nexists x$

$y<0$: $\nexists x$

$\Rightarrow f$ injectivă

met III:



$\Rightarrow$ $\forall$ paralelă $\cap G_f$ în cel mult 1 pct

---

Exp 3: $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, inj f

$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow (x_1)^2=(x_2)^2 \Rightarrow x_1=\pm x_2$,

deci nu putem arăta că $x_1=x_2$

Căutăm un contraexemplu,

$\exists x_1=3, x_2=-3$ cu $f(x_1)=f(x_2)$

și $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f$ nu e injectivă

FUNCȚII SURJECTIVE

sunt mai multe metode

f SURJECTIVĂ $\Leftrightarrow$

$$Im f = Cd f.$$

sau

$\forall y \in Cd f$, ec. $f(x)=y$ are cel puțin o soluție $x \in D_f$

sau

$\forall y \in Cd f$, $\parallel$ prin y la $Ox \cap G_f$ în cel puțin 1 pct $x \in D_f$

Obs 1: dacă încercăm să arătăm că fct f e surjectivă și nu ieșe cu metodele anterioare, trebuie să dăm un contraexemplu, așadar

f NU E SURJECTIVĂ $\Leftrightarrow$

$$Im f \neq Cd f$$

sau

$\exists y \in Cd f$ a.î. ec. $f(x)=y$ nu are nicio soluție $x \in D_f$ sau

$\exists y \in Cd f$ $\parallel$ prin y la Ox și G_f

Obs 3: metoda 3, cea cu $\parallel$ la Ox nu e punctată cu maxim

---

Ex 1.: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x)=[x]$ studiați surjectivitatea lui f.

met I: $\forall y \in \mathbb{Z}$, ar trebui să $\exists x \in \mathbb{R}$ cu $f(x)=y$ adică $[x]=y$ care e adev pt că $\forall y \in \mathbb{Z}$ putem lua x de forma $x = y+0,1$ cu $[x]=y \Rightarrow$

$\Rightarrow Im f = Cd f \Rightarrow f$ surjed.

Ex 2.: $f: (1;\infty) \to (4;\infty)$, $f(x)=3x+1$ studiați surjectivitatea lui f

$\forall y \in (4;\infty)$, ec. $f(x)=y \Leftrightarrow 3x+1=y$

$\Leftrightarrow x = \frac{y-1}{3}$.

Dar, $y>4 \Rightarrow \frac{y-1}{3} > 1 \Rightarrow x \in (1;\infty)$

$\Rightarrow \forall y \in Cd f$, ec. $f(x)=y$ are cel puțin o sol $x \in D_f \Rightarrow f$ surjectivă

Ex 3: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, studiați surjectivitatea lui f

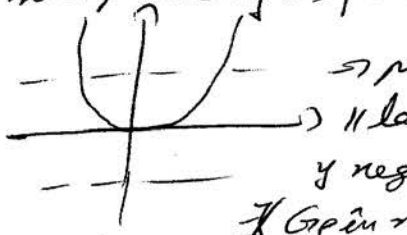
$\forall y \in \mathbb{R}$, ec. $f(x)=y \Leftrightarrow x^2 = y$

$\overset{y \geq 0}{\Leftrightarrow} x = \pm\sqrt{y}$ deci pot fi variante

căutăm un contraexemplu

Pt $y=-1$, ec. $f(x)=y \Leftrightarrow x^2=-1$ nu are soluții $x \in D_f \Rightarrow f$ nu e surject.

met II:



$\Rightarrow$ putem duce $\parallel$ la Ox prin y negativ care nu $\not\parallel G_f$ în niciun pct

$\Rightarrow f$ nu e surjectivă

Ex 4: $f: \mathbb{R} \to [0;\infty)$, $f(x)=x^2$, studiați surjectivitatea lui f.

$\forall y \in [0;\infty)$, ec. $f(x)=y \Leftrightarrow x^2=y$

$\overset{y \geq 0}{\Rightarrow} x = \pm\sqrt{y} \overset{x \in \mathbb{R}}{\Rightarrow} x = \pm\sqrt{y}$

$\Rightarrow \forall y \in [0;\infty)$, $\exists x \in \mathbb{R}$ cu $f(x)=y$

$\Rightarrow f$ surjectivă

met II:



$\Rightarrow \forall \parallel$ prin y la $Ox \cap G_f$ în cel puțin 1 pct $\Rightarrow f$ surjectivă

FUNCȚII BIJECTIVE

sunt mai multe metode

f BIJECTIVĂ $\Leftrightarrow$

$\forall y \in Cd_f$, ec. $f(x)=y$ are <u>exact</u> o soluție $x \in D_f$

sau

$\forall y \in Cd_f$, $\parallel$ prin y la $Ox \cap G_f$ în exact un punct $x \in D_f$

sau

arăt. că f inj și că f surject cu orice metodă

<u>Obs 1</u>: Pt a arăta că f nu e bijectivă, este obligatoriu să dăm un contraexemplu

<u>Obs 2</u>: metoda grafică deși e foarte utilă, e considerată intuitivă și nu e punctată maxim

<u>Obs 3</u>: o funcție bijectivă $\Leftrightarrow$ fct inversabilă

<u>Exp 1</u>: $f:(-\infty;0] \to [0;\infty)$, $f(x)=x^2$

<u>Studiați</u> bijectivitatea lui f

$\forall y \in [0;\infty)$, ec. $f(x)=y \Leftrightarrow x^2=y$

$\overset{y\geq 0}{\Longrightarrow} x=\pm\sqrt{y} \overset{x\leq 0}{\Longrightarrow} x=-\sqrt{y}$

$\Rightarrow \forall y \in [0;\infty)$, ec. $f(x)=y$ are exact o soluție $x \in D_f \Rightarrow f$ e bijectivă

<u>Exp 2</u>: $f:(-\infty;0] \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

Studiați bijectivitatea lui f.

$\forall y \in \mathbb{R}$, ec. $f(x)=y \Leftrightarrow x^2=y$

$\Rightarrow \begin{cases} y\geq 0 & x=\pm\sqrt{y} \text{ sau} \\ y<0 & \nexists x \end{cases} \overset{x\leq 0}{\Longrightarrow} \begin{cases} y\geq 0 & x=-\sqrt{y} \text{ sau} \\ y<0 & \nexists x \end{cases}$

$\Rightarrow$ sunt variante pt y (cele $y<0$) pt care ec. $f(x)=y$ nu are soluție

Căutăm un contraexemplu, pt $y=-2 \Rightarrow$ ec $f(x)=-2 \Leftrightarrow x^2=-2$ nu are soluție $x \in D_f \Rightarrow f$ nu e bijectivă

INVERSA UNEI FUNCȚII

f inversabilă $\Leftrightarrow$ f bijectivă

Obs.: inversa funcției f se notează f^{-1} dar $f^{-1} \neq \frac{1}{f}$

Obs 2: dacă se cere doar valoarea funcției inverse într-o valoare, atunci $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

Obs 3: dacă $f: A \to B$ atunci $f^{-1}: B \to A$

Pt a găsi inversa unei fct,

E_1) se arată că f bijectivă (de obicei cu ec. $f(x)=y$ are sol unică)

E_2) se găsește $x = \ldots$ în fct de y

E_3) $f^{-1}(y)=x \Rightarrow f^{-1}(y)= \ldots$ în fct de y, se revine la notația cu x,

$f^{-1}(x) = \ldots$ în fct de x

E_4) dacă $f: A \to B$ atunci $f^{-1}: B \to A$

Exp.: Fie $f(x)=3^x+x^3+5$, se știe că f bijectivă, se cere $f^{-1}(9)$

E_1) $f^{-1}(9)=b \Leftrightarrow f(b)=9$

E_2) observăm că $f(1)=9$ și cum f bijectivă $\Rightarrow b=1$ sol. unică $\Rightarrow f^{-1}(9)=1$

Exp 2.: $f:(1;5] \to (3;11]$, $f(x)=2x+1$, studiați dacă f inversabilă și determinați $f^{-1}(x)$

E_1) $\forall y \in (3;11]$, ec. $f(x)=y \Leftrightarrow 2x+1=y \Leftrightarrow x=\frac{y-1}{2}$

E_2) $y \in (3;11] \Rightarrow y-1 \in (2;10] \Rightarrow \frac{y-1}{2} \in (1;5] \Rightarrow x \in (1;5] \Rightarrow x \in D_f$

$\Rightarrow \forall y \in C_f$, ec. $f(x)=y$ are exact o soluție $x \in D_f \Rightarrow$ $\Rightarrow f$ bijectivă $\Rightarrow f$ inversabilă

E_3) $f^{-1}(y)=x \Rightarrow f^{-1}(y)=\frac{y-1}{2}$ și revenind la notația în x

$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$,

$f^{-1}:(3;11] \to (1;5]$

EC. IRAȚIONALE DE TIPUL (N1)

$$\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$$

E_1) Condiții

n par Cond.: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \Rightarrow I_1 \\ g(x) \geq 0 \Rightarrow I_2 \end{cases}$

n par

$I_c = I_1 \cap I_2$

n impar cond: $x \in \mathbb{R}$

Obs.: putem să nu punem condiții, dar atunci obținem soluții posibile pe care

rămânem obligați să le verificăm în ec. inițială

E_2) $\sqrt[n]{f(x)} = g(x) \mid ()^n$

$\Rightarrow f(x) = (g(x))^n$ unde $(g(x))^n$ se calculează cu formula

E_3) soluțiile posibile se verifică sau în I_c sau în ec inițială și se aleg doar cele convenabile

---

Ex 1: rezolvați $\sqrt{x-1} = x-3$

E_1) $\sqrt{x-1} = x-3 \mid ()^2 \Rightarrow$

$x-1 = (x-3)^2 \Rightarrow x-1 = x^2-6x+9$

$\Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0$

E_2) $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix}$

$\Rightarrow$ soluții posibile $x_1 = 5, x_2 = 2$

E_3) le verificăm în ec. inițială

$x_1 = 5 \Rightarrow \sqrt{5-1} = 5-3 \Leftrightarrow 2 = 2$ OK

$\Rightarrow x_1 = 5$ soluție

$x_2 = 2 \Rightarrow \sqrt{2-1} = 2-3 \Leftrightarrow 1 = -1$ KO

$\Rightarrow x_2 = 2$ nu e sol

S_g: $x \in \{5\}$

Ex 2: rezolvați: $\sqrt[3]{x^3-1} = x-1$

E_1) $\sqrt[3]{x^3-1} = x-1 \mid ()^3$

$x^3 - 1 = (x-1)^3 \Rightarrow$

$x^3 - 1 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \Rightarrow$

$3x(x-1) = 0 \Rightarrow x \in \{0, 1\}$ sol posibile

E_2) le verificăm în ec inițială

$x_1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{-1} = -1 \Leftrightarrow -1 = -1$ OK

$x_2 = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{0} = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ OK

S_g: $x \in \{0, 1\}$

EC. IRAȚIONALE ÎN CARE APAR 2 RADICALI DE TIPUL $\sqrt[n]{f(x)}+\sqrt[m]{g(x)}=\alpha$

(N2)

E_1) eventuale condiții (sau dacă nu punem condiții, obținem soluții posibile pe care trebuie să le verificăm în ec. inițială)

E_2) $\sqrt[n]{f(x)}=u \overset{()^n}{\Rightarrow} x=\dots$ în funcție de u

$\sqrt[m]{g(x)}=v \overset{()^m}{\Rightarrow} x=\dots$ în funcție de v

E_3) egalând valorile lui x găsim o ec. cu u și v înlocuim în ec inițială $\Rightarrow$ $u+v=\alpha \Rightarrow$ a doua ec în funcție de u și v

E_4) avem sistem, găsim pe u sau pe v (pe cea mai simplă), apoi găsim valori posibile pt x

E_5) x verifică în ec. inițială

Ex 1: rezolvați:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=2$$

E_1) $\sqrt{x-1}=u \overset{()^2}{\Rightarrow} x-1=u^2 \Rightarrow x=u^2+1$

$\sqrt{x+3}=v \overset{()^2}{\Rightarrow} x+3=v^2 \Rightarrow x=v^2-3$

E_2) egalând $x \Rightarrow u^2+1=v^2-3$

înlocuim în ec $\Rightarrow u+v=2$

E_3) avem sistemul

$$\begin{cases} u^2+1=v^2-3 \\ u+v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^2-v^2=-4 \\ u=2-v \end{cases}$$

$\Rightarrow (2-v)^2-v^2=-4 \Rightarrow$

$4-4v+v^2-v^2=-4 \Rightarrow -4v=-8$

$\Rightarrow v=2$

E_4) dar, $x=v^2-3 \Rightarrow x=4-3=1$

sol posibilă, o verificăm

$\sqrt{1+3}=2 \Rightarrow 0+2=2$ OK

Ex 2: rezolvați

$$\sqrt{2-x}+\sqrt[3]{2x-3}=1$$

E_1) $\sqrt{2-x}=u \Rightarrow 2-x=u^2 \Rightarrow x=2-u^2$

$\sqrt[3]{2x-3}=v \Rightarrow 2x-3=v^3 \Rightarrow x=\frac{v^3+3}{2}$

E_2) egalând $x \Rightarrow 2-u^2=\frac{v^3+3}{2}$ și din ec $\Rightarrow u+v=1 \Rightarrow$ sistemul

$$\begin{cases} 4-u^2=v^3+3 \\ u+v=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v^3+u^2=1 \\ u=1-v \end{cases}$$

$\Rightarrow v^3+(1-v)^2=1 \Rightarrow v^3+1-2v+v^2=1$

$\Rightarrow v^3+v^2-2v=0 \Rightarrow v(v^2+v-2)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} v_1=0 \\ v^2+v-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_2=1 \\ v_3=-2 \end{cases}$

E_3) $v_1=0$ și $x=\frac{v^3+3}{2} \Rightarrow x_1=\frac{3}{2}$ posibilă, o verif. $\Rightarrow \sqrt{2-\frac{3}{2}}+\sqrt[3]{2\cdot\frac{3}{2}-1}=1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{2}}+\sqrt[3]{2}=1$ fals

E_4) $v_2=1 \Rightarrow x=2 \Rightarrow \sqrt{0}+\sqrt[3]{1}=1$ OK

E_5) $v_3=-2 \Rightarrow x=-\frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{9}{2}}+\sqrt[3]{-8}=1$ KO

S_f: $x=2$

EC. EXPONENȚIALE DE TIPUL (N11)

$\alpha a^{x+1} + \beta a^x + \gamma = 0$ (cu notație)

E_1) Se scriu toate puterile în funcție de a^x

E_2) se not. $a^x = t$, se rezolvă ec. apoi găsim x

Obs.: Dacă $a^x < 0 \Rightarrow x \in \emptyset$, dacă t nu poate fi scris ca putere cu baza a atunci logaritmăm în baza 10

Ex.: $2 \cdot 5^x + 3 \cdot 5^{x-1} - 4 \cdot 5^{x-2} = 61$

E_1) Ec. devine: $2 \cdot 5^x + 3 \cdot \frac{5^x}{5} - 4 \cdot \frac{5^x}{5^2} = 61$

E_2) not $5^x = t \Rightarrow 2t + \frac{3t}{5} - \frac{4t}{25} = 61 \mid \cdot 25$

$\Rightarrow 50t + 15t - 4t = 61 \cdot 25 \Rightarrow 61t = 61 \cdot 25 \mid : 61$

$\Rightarrow t = 25$

E_3) $5^x = 25 \Rightarrow 5^x = 5^2$, baza este $5 \neq 1 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

TEMĂ: a) $4 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^{x-1} = 22$ b) $3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = \frac{13}{3}$

c) $3^x + 3^{x+2} = 2^{x+3} + 2^{x+1}$ d) $5^x - 3^{x+1} + 5^{x+2} = 5^{x+1} + 3^{x+1} + 3^{x+2}$

EC. EXPONENȚIALE DE TIPUL (N1)

$$\alpha \cdot a^{2x} + \beta \cdot a^x + \gamma = 0$$

E_1) se notează $a^x = t \Rightarrow a^{2x} = t^2 \Rightarrow$ ec. de gr II în $t \Rightarrow t_{1,2} = \dots$

E_2) $a^x = t_1 \Rightarrow x = \dots$

$a^x = t_2 \Rightarrow x = \dots$

Obs.: Dacă $t_1, t_2 < 0 \Rightarrow \nexists x$ în acel caz

Obs 2.: Dacă t_1, t_2 nu pot fi scrise ca o putere a lui a, atunci logaritmăm în baza 10

Exp.: Rezolvați: $9^x - 3^x - 2 = 0$

E_1) Ec. $3^{2x} - 3^x - 2 = 0$, not $t = 3^x \Rightarrow 3^{2x} = t^2$

E_2) $t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{cases} \frac{4}{2} = 2 \\ -\frac{2}{2} = -1 \end{cases}$

E_3) $t_1 = 2 \Rightarrow 3^x = 2 \mid \lg(\cdot\cdot) \Rightarrow x \lg 3 = \lg 2 \Rightarrow x = \frac{\lg 2}{\lg 3}$

$t_2 = -1 \Rightarrow 3^x = -1 \Rightarrow x \in \emptyset$

$S_f: x = \frac{\lg 2}{\lg 3}$

TEMĂ: a) $4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$ b) $9^x + 3^x - 12 = 0$

c) $4^x + 2^{x+1} = 80$ d) $4^x + 2^x = 20$

EC. EXPONENȚIALE DE TIPUL (N2)

$$\alpha \cdot a^{2x} + \beta \cdot (ab)^x + \gamma \cdot b^{2x} = 0$$

E_1) Se împarte ecuația prin cea mai mică putere (sau cea mai mare putere)

E_2) se notează, se obț o ec. de gr II $\Rightarrow t_{1,2}$

E_3) se obține x doar dacă $t > 0$, pentru $t < 0$ $\Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$

Obs.: Dacă x nu poate fi găsit direct (prin scriere cu puteri la aceeași bază), atunci logaritmăm în baza 10

Exemplu: $9^x - 3 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x = 0$

E_1) $9^x - 3 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x = 0 \mid : 4^x$

$\Rightarrow \left(\frac{9}{4}\right)^x - 3 \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x + 2 = 0$

E_2) not $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0 \Rightarrow t^2 - 3t + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 2 \\ t_2 = 1 \end{cases}$

E_3) $\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2 \mid \lg(\dots) \Rightarrow x \lg \frac{3}{2} = \lg 2 \Rightarrow x = \frac{\lg 2}{\lg \frac{3}{2}}$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^0 \Rightarrow x = 0$

$S_p: x \in \left\{0; \frac{\lg 2}{\lg \frac{3}{2}}\right\}$

TEMĂ: a) $25^x - 3 \cdot 10^x + 2 \cdot 4^x = 0$ b) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

c) $25^x - 6 \cdot 15^x + 8 \cdot 9^x = 0$ d) $4^x + 3^x \cdot 2^{x+1} = 3 \cdot 9^x$

e) $3 \cdot 16^x + 37 \cdot 36^x = 28 \cdot 9^x$ f) $6 \cdot 9^{\frac{1}{x}} - 13 \cdot 6^{\frac{1}{x}} + 6 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$

EC. LOGARITMICE DE TIPUL (N1)

$$\log_{f(x)} g(x) = h(x)$$

E_1) se pun eventuale condiții (dacă nu punem condiții, soluțiile posibile se verifică în ecuația dată)

E_2) se folosește definiția logaritmului

$$\log_{f(x)} g(x) = h(x) \Rightarrow g(x) = (f(x))^{h(x)}$$

Obs.: valoarea unui logaritm poate fi și negativă

Exp 1: rezolvați $\log_2(x+1) = 3$

E_1) folosind definiția $\Rightarrow x+1 = 2^3 \Rightarrow x+1 = 8$

$\Rightarrow x = 7$ soluție posibilă

E_2) o verificăm $\Rightarrow \log_2 8 = 3$ OK.

$\Rightarrow x = 7$ soluție

Exp 2: rezolvați $\log_3 x^2 = 4$

E_1) $\log_3 x^2 = 4 \Rightarrow x^2 = 3^4 \Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = \pm 9$ soluții posibile

E_2) le verificăm: $x = 9 \rightarrow \log_3 9^2 = 4$ A $\rightarrow$ OK soluții

$x = -9 \rightarrow \log_3 (-9)^2 = 4$ A

Obs.: era greșit $\log_3 x^2 = 2\log_3 x$, era corect $\log_3 x^2 = 2\log_3 |x|$

EC. LOGARITMICE CARE SE REZOLVĂ PRIN NOTAȚII

(N2)

E_1) se pun eventuale condiții (dacă nu punem condiții, soluțiile posibile se verifică în ec inițială)

E_2) se știe cont că $\log_b^2 A = (\log_b A)^2$ și înainte de a face notații, scriem sub forma cea mai simplă

Exp 1.: $\log_2^2(x+1) - \log_2(x+1) - 2 = 0$

E_1) ec. devine

$(\log_2(x+1))^2 - \log_2(x+1) - 2 = 0$

E_2) not $\log_2(x+1) = t \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$t^2 - t - 2 = 0 \Rightarrow$

$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow -1 \end{matrix}$

E_3) cazI: $t_1 = 2 \Rightarrow \log_2(x+1) = 2$

$\Rightarrow x+1 = 2^2 \Rightarrow x = 3$ sol posibilă,

o vf $\Rightarrow (\log_2 4)^2 - \log_2 4 - 2 = 0$

$\Leftrightarrow 4 - 2 - 2 = 0$ OK.

E_4) cazII: $t_2 = -1 \Rightarrow \log_2(x+1) = -1$

$\Rightarrow x+1 = 2^{-1} \Rightarrow x+1 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

sol posibilă, o vf

$\left(\log_2 \frac{1}{2}\right)^2 - \log_2 \frac{1}{2} - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$1 + 1 - 2 = 0$ OK

$S_o: x \in \{3; -\frac{1}{2}\}$

Exp 2: $2\lg^2(x^3) - 3\lg x - 1 = 0$

E_1) $\lg^2(x^3) = (\lg x^3)^2 =$

$= (3\lg x)^2 = 9(\lg x)^2 \Rightarrow$ ec.

$2 \cdot 9(\lg x)^2 - 3\lg x - 1 = 0$

E_2) not $\lg x = t \Rightarrow$

$18t^2 - 3t - 1 = 0$

$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{2 \cdot 18} = \frac{3 \pm 9}{36} \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{3} \\ \searrow -\frac{1}{6} \end{matrix}$

E_3) $t_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \lg x = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 10^{\frac{1}{3}}$

sol posibilă, o înlocuim $\Rightarrow$

$18\left(\lg 10^{\frac{1}{3}}\right)^2 - 3\lg 10^{\frac{1}{3}} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 18 \cdot \frac{1}{9} - 3 \cdot \frac{1}{3} - 1 = 0$ OK

E_4) $t_2 = -\frac{1}{6} \Rightarrow \lg x = -\frac{1}{6} \Rightarrow x = 10^{-\frac{1}{6}}$

sol posibilă, o înlocuim $\Rightarrow$

$18\left(\lg 10^{-\frac{1}{6}}\right)^2 - 3\lg 10^{-\frac{1}{6}} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 18 \cdot \frac{1}{36} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$ OK

E_5) $S_o: x \in \{10^{\frac{1}{3}}; 10^{-\frac{1}{6}}\}$

ECUAȚII CARE SE POT REZOLVA FOLOSIND MONOTONIA

(N2)

E_1) Se notează fiecare termen care depinde de x cu o funcție: $f_1(x), f_2(x) \ldots$, se trece term. liber în dreapta

E_2) Se precizează monotonia fiecărei funcții (vedem ce se întâmplă atunci când crește x, dacă valorile funcției cresc sau scad)

E_3) Se folosesc proprietățile:

a) $f_1, f_2 \nearrow \Rightarrow (f_1+f_2) \nearrow$ b) $f_1, f_2 \searrow \Rightarrow (f_1+f_2) \searrow$

c) $f_1 \nearrow \Rightarrow (-f_1) \searrow$ d) $f_1 \searrow \Rightarrow (-f_1) \nearrow$

E_4) Se obține o f s monotonă = număr $\Rightarrow$ ec. are <u>cel mult</u> o soluție. Se intuiește soluția deci acea soluție va fi unică

<u>Exp 1</u>.: Rezolvați ec.: $2^x = 3-x$

E_1) $2^x = 3-x \Leftrightarrow 2^x + x = 3$

E_2) $f_1(x) = 2^x$ e $\nearrow$, $f_2(x) = x \nearrow \Rightarrow (f_1+f_2)(x) \nearrow$

$\Rightarrow$ ec. $2^x + x = 3$ are cel mult o soluție $\Rightarrow x=1$ sol unică

E_3) Obs. că $x=1$ soluție

<u>Exp 2</u>: Rezolvați ec.: $3^x + 4^x = 5^x$

E_1) ec. $\Leftrightarrow 3^x + 4^x - 5^x = 0$ și $f_1(x) = 3^x \nearrow$, $f_2(x) = 4^x \nearrow$ și $f_3(x) = 5^x \nearrow$ dar nu știm monotonia lui $3^x+4^x-5^x$, căutăm altă metodă

E_2) $3^x + 4^x = 5^x \mid :5^x \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$ și $f_1(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \searrow$, $f_2(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x \searrow$, $\Rightarrow (f_1+f_2)(x) \searrow \Rightarrow$ ec. $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$ are Obs. că $x=2$ verifică $\Rightarrow x=2$ sol. unică

DEFINIȚIA FACTORIALULUI

$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ $\forall n$

$0! = 1$ (așa se definește)

Obs.: atunci când apar factoriale, se descompun cel mai mare în funcție de cel mai mic

Ex1: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

Ex2: $\frac{5!}{3!} = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3!} = 4 \cdot 5 = 20$

Ex3: $\frac{(n+2)!}{(n+3)!} = \frac{(n+2)!}{(n+2)!(n+3)} = \frac{1}{n+3}$

Ex4: $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} = \frac{(n-3)!(n-2)(n-1)}{(n-3)!} = (n-2)(n-1)$

MULȚIMI ORDONATE, MULȚIMI NEORDONATE

mț ordonate: contează ordinea elementelor

Exp: câte nr. de 2 cifre distincte se pot forma cu cifre din mulțimea $\{1; 3; 5\}$

Numerele sunt 13; 17; 31; 37; 71; 73 $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ 6 numere

mț neordonate: nu contează ordinea elementelor,

Exp: câte mulțimi cu 2 elemente distincte se pot forma cu $\{1; 3; 7\}$

$\{1; 3\}$; $\{1; 7\}$; $\{3; 7\}$ $\rightarrow$ 3 mulțimi

Obs: la mț neordonate apar acolade și nu contează ordinea elementelor

Obs2: întotdeauna numărul mulțimilor ordonate este mai mare decât al mț. neordonate

PERMUTĂRI

a) P_n este numărul mț ordonate cu n elemente din n posibile

b) $P_n = n!$ formulă

c) Cond: $n \in \mathbb{N}$

Exp: În câte moduri pot pune pe raft 5 cărți distincte?

Punem 5 cărți din 5, contează ordinea

$\Rightarrow P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

(***)

Obs.: PERMUTĂRI CU REPETIȚIE

Dacă a se repetă de n_1 ori, b se repetă de n_2 ori

$\Rightarrow$ alegerea a $n_1 + n_2$ variante de a și de b se poate face

în $\frac{n!}{n_1! \cdot n_2!}$

Exemplu: câte nr. de 7 cifre se pot forma cu cifrele: 1, 3, 5, 5, 1, 1, 1

$$\frac{7!}{4! \cdot 1! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2!} = 105 \text{ numere}$$

ARANJAMENTE

a) A_n^k este numărul <u>șirt. ordonate</u> cu k elemente din n posibile

b) $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

c) <u>Cond</u>: $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ k \in \mathbb{N} \\ n \geq k \end{cases}$

<u>Exp.</u>: În câte moduri pot pune pe raft 3 cărți distincte din 5 posibile?

Aleg 3 din 5, contează ordinea

$$\Rightarrow A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} =$$

$$= \frac{2! \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{2!} = 60$$

COMBINĂRI

a) C_n^k este numărul submulțimilor neordonate cu k elemente din n posibile

b) $$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

c) Cond.: $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ k \in \mathbb{N} \\ n \geq k \end{cases}$

Ex: În câte moduri aleg 3 cărți distincte din 5 să a pleca excursie?

Aleg 3 din 5, nu contează ordinea

$$\Rightarrow C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} =$$

$$= \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{3! \cdot 2!} = \frac{20}{2} = 10$$

PROPRIETĂȚI ALE COMBINĂRILOR

a) $\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}}$ (formula combinărilor complementare)

Exp: $C_8^3 = C_8^{8-3} \Rightarrow C_8^3 = C_8^5$

b) $\boxed{C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}}$ (relație de recurență)

Exp: $C_8^3 = C_7^3 + C_7^2$

c) $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1} \Rightarrow \boxed{k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}}$

Exp: $3 C_8^3 = 8 C_7^2$

REGULA SUMEI. REGULA PRODUSULUI (N1)

REGULA SUMEI: Dacă un obiect A se alege în „m" moduri și alt obiect B se alege în „n" moduri, alegerea lui A sau a lui B poate fi făcută în „m+n" moduri

Exp: Câte numere de forma $N=\overline{236a}$ divizibile cu 5 există?

Caz I: $a=0 \Rightarrow \overline{2360} \vdots 5$ și cum sunt 10 variante pentru $b \Rightarrow$ 10 numere

Caz II: $a=5 \Rightarrow \overline{2365} \vdots 5$ și cum sunt 10 variante pentru $b \Rightarrow$ 10 numere

Deoarece a poate fi 0 sau 5 $\Rightarrow$ în total sunt 10+10=20 numere

REGULA PRODUSULUI: Dacă un obiect A se alege în „m" moduri și dacă după fiecare astfel de alegere, un alt obiect B se alege în „n" moduri independente de alegerea lui A, atunci alegerea lui A și B se poate face în „$m \cdot n$" moduri

Exp: Câte numere de forma $N=\overline{236a} \vdots 5$ există

b → 10 v
a → 2 v
independ

Nr. de moduri $\Rightarrow 10 \cdot 2 = 20$ numere

PROBLEME DE NUMĂRARE REZOLVATE PRIN „NUMĂRARE"

(N2)

Exp 1: câte fct $f:\{1;2;5\}\to\{3;4;5;6;7\}$ există?

$f(1)\to 5$ ✓ sunt independente și
$f(2)\to 5$ ✓ din regula produsului
$f(3)\to 5$ ✓ $\Rightarrow 5\cdot 5\cdot 5 = 5^3 = 125$

Exp 2: câte fct $f:\{1;2;5\}\to\{3;4;5;6;7\}$ cu $f(1)=f(5)$ există?

Exp 1: $f(1)\to 5$ ✓ $\Rightarrow$ sunt independente
$f(2)\to 5$ ✓ doar $f(1)$ și $f(2)\Rightarrow$
$f(5)=f(1)$ $5\cdot 5 = 25$ funcții

Exp 3: câte fct $f:\{3;4;5;6\}\to\{1;5\}$ surjective există?

$f(3)=1, f(4)=1, f(5)=1 \to f(6)=5 \to 1$ fct
$f(3)=1, f(4)=1, f(5)=5 \to f(6)\to 2$ ✓ $\to 2$ fct
$f(3)=1, f(4)=5, f(5)=1 \to f(6)\to 2$ ✓ $\to 2$ fct
$f(5)=5 \to f(6)\to 2$ ✓ $\to 2$ fct
$f(3)=5; f(4)=1 \to \begin{cases} f(5)=1 \to f(6)\to 2 \text{ fct} \\ f(5)=5 \to f(6)\to 2 \text{ fct} \end{cases}$
$f(4)=5 \to \begin{cases} f(5)=1 \to f(6)\to 2 \text{ fct} \\ f(5)=5 \to f(6)=1 \to 1 \text{ fct} \end{cases}$

În total $\Rightarrow$ 14 funcții

Exp 4: câte fct $f:\{1;2;5\}\to\{3;4;5;6;7\}$ injective sunt?

$f(1)\to 5$ ✓; $f(2)\to 4$ ✓; $f(5)\to 3$ ✓ indep
$\Rightarrow 5\cdot 4\cdot 3 = 60$ fct

Exp 5: câte fct $f:\{1;4;5\}\to\{3;4;5;6;7\}$

$f(1)=3, \begin{cases} f(4)=4, f(5)\to 3 \text{ ✓} \\ f(4)=5, f(5)\to 2 \text{ ✓} \\ f(4)=6, f(5)\to 2 \text{ ✓} \end{cases}$ 6 fct; 3 fct; 1 fct

Exp 6: câte nr. de 3 cifre au exact 2 cifre egale?

E_1) cazI: $\overline{aab} \to \begin{matrix} a\to 9 \text{ ✓} \\ b\to 9 \text{ ✓ (} b\to a\text{)} \end{matrix} \Big\} \to 81$

cazII: $\overline{aba} \to \begin{matrix} a\to 9 \text{ ✓} \\ b\to 9 \text{ ✓} \end{matrix} \Big\} \to 81$

cazIII: $\overline{abb} \to \begin{matrix} a\to 9 \text{ ✓} \\ b\to 9 \text{ ✓} \end{matrix} \Big\} \to 81$

cu regula sumei $\to 81+81+81 = 243$

Exp 7: câte nr. de 3 cifre există?

$\overline{abc}$, $a\to 9$ ✓, $b\to 10$ ✓, $c\to 10$ ✓ indep
$\Rightarrow 9\cdot 10\cdot 10 = 900$

Exp 8: câte nr. de 3 cifre distincte $\exists f(?)$

$\overline{abc}$, $a\to 9$ ✓, $b\to 9$ ✓, $c\to 8$ ✓ $\Rightarrow 9\cdot 9\cdot 8 = 648$ nr.

Exp 9: câte nr. de 4 cifre distincte de forma $\overline{abcd}$ cu $a+b=7$ și d par?

$a+b=7$ și a,b cifre $\Rightarrow a\in\{1;2;\dots;7\}$ și $b\in\{6;5;\dots;0\}$
dar $b=7-a \Rightarrow b$ depinde de a
așadar, $a\to 7$ ✓, $b=7-a$, $c\to 10$ ✓, $d\to 5$ ✓ $\Big\} \Rightarrow 7\cdot 10\cdot 5 = 350$ nr. (sunt independente)

Exp 10: Fie $A=\{1;2;3\}$, găsiți nr. elemente $A\{(a,b)\}$

$a\to 3$ ✓
$b\to 3$ ✓ $\Big\} \to$ independ $\Rightarrow 3^2 = 9$ elemente

Exp 11: Găsiți câte nr. de 3 cifre sunt divizibile cu 6 sau cu 8

$M_6 = \{102; 108; \dots; 996\} \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r$
$\Rightarrow 996 = 102 + (n-1)\cdot 6 \Rightarrow n_1 = 150$
$M_8 = \{104; 112 \dots; 992\} \Rightarrow 992 = 104 + (n-1)\cdot 8$
$\Rightarrow n_2 = 112$
Dar, multiplii lui 24 îi numărăm de 2 ori, deci îi scădem o dată
$M_{24} = \{120; 144; \dots; 984\} \Rightarrow n_3 = 37$
$150 + 112 - 37 = 225$

FORMULE PENTRU PROBLEME DE NUMĂRARE

notăm $\text{card}A=a$, $\text{card}B=b$

1) nr. de fct oarecare $f: A\to B$ este b^a

2) nr. de fct injective $f: A\to B$ este A_b^a

3) nr. de fct bijective $f: A\to B$ este $P_b=b!$ și $\exists$ doar dacă $a=b$

4) nr. de fct $\nearrow$ $f: A\to B$ este C_b^a

nr. de fct $\searrow$ $f: A\to B$ este C_b^a

nr. de fct $\nearrow$ monot $f: A\to B$ este $2C_b^a$

5) nr. de submț ordonate cu k elem ale o mț cu n elemente este C_n^k

6) nr. total de submț ale unei mț cu n elemente este 2^n

7*) nr. de numere cu k cifre distincte două câte două ale unei mț cu n elem este A_n^k (dar aici e mai sigur cu abcd ...)

8*) nr. de numere cu k cifre (nu neapărat distincte) ale o mț cu n elem este n^k (dar mai bine le numărăm)

9) nr. mț ordonate $\nearrow$ sau $\searrow$ cu k elemente ale o mț cu n elemente este C_n^k (sunt mai puține decât A_n^k)

10) nr. de fct surjective $f: A\to B$ este $b^a - C_b^1(b-1)^a + C_b^2(b-2)^a - C_b^3(b-3)^a + \dots + (-1)^{b-1}C_b^{b-1}$

Obs.: deși $\exists$ formulă ale fct surjective, e mai practic să deducem numărul lor

---

Exp 1: se cere nr. de fct oarecare $f: A\to B$ cu $A=\{1;2;5\}$ și $B=\{4;6\}$

nr. de fct $b^a = 2^3 = 8$

Exp 2: se cere nr. de fct inj $f: \{1;2\}\to\{3;4;5\}$

nr. de fct $A_b^a = A_3^2 = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3!}{1!} = 6$

Exp 3: nr. de fct bijec $f: \{1;2;3\}\to\{5;6;7\}$

nr. de fct $P_3 = 3! = 6$

Exp 4: nr. de fct $\nearrow$ $f: \{1;2\}\to\{5;6;7\}$ este $C_3^2 = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = 3$

Exp 5: nr. de fct strict monotone $f: \{1;3;4\}\to\{5;6;7;8;9\}$ este $C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 4\cdot 5 = 20$

Exp 6: se cere nr. de submț cu 3 elem ale $A=\{1;2;3;4;5\} \Rightarrow C_5^3 = \frac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$

Exp 7: nr. total de submț ale mț $A=\{1;2;3;4;5\}$ este $2^5 = 32$

Exp 8: câte nr. de 2 cifre distincte se pot forma cu elem din $\{2;3;4;5;6\}$

mod I: $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 4\cdot 5 = 20$

mod II: $\overline{ab} \to \begin{matrix} a\to 5\text{ v} \\ b\to 4\text{ v} \end{matrix}$ indep $\Rightarrow 5\cdot 4 = 20$

Exp 9: câte nr. de 2 cifre se pot forma cu elem din $\{2;3;4;5;6\}$

mod I: $5^2 = 25$

mod II: $\overline{ab}$ cu $a\to 5$ v, $b\to 5$ v ind $\Rightarrow 25$

Exp 10: câte triplete (a,b,c) cu $a<b<c$ și $a,b,c\in\{0;1;2;3;4;5\}$ sunt?

mod I: $C_6^3 = \frac{6!}{3!\cdot 3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{3!} = 20$

mod II: $a=0; b=1 \to c\to 4$ v $\to$ 4 nr

$b=2 \to c\to 3$ v $\to$ 3 nr

... : complicat

PROBABILITATEA

$$P = \frac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$$

Exp.: Câte numere de 2 cifre : 10 există

$$E_1) P = \frac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$$

E_2) nr. caz posibile: toate numerele de 2 cifre $\Rightarrow \overline{ab}$ unde $a \to$ 9 variante, $b \to$ 10 variante independente

---

regula produsului $\Rightarrow 9 \cdot 10 = 90$ nume

E_3) nr. caz favorabile: toate numerele de 2 cifre divizibile cu 10 $\Rightarrow \overline{ab}$ unde

$a \to$ 9 variante

$b \to$ 1 variantă

independ

---

regula produsului $\Rightarrow$ 9 numere

$$E_1) P = \frac{9}{90} = \frac{1}{10}$$

BINOMUL LUI NEWTON (N1)

are forma $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

adică $(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n$

Exp: $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{y})^3 = C_3^0 (\sqrt{x})^3 (\sqrt[3]{y})^0 + C_3^1 (\sqrt{x})^2 (\sqrt[3]{y})^1 + C_3^2 (\sqrt{x})^1 (\sqrt[3]{y})^2 + C_3^3 (\sqrt{x})^0 (\sqrt[3]{y})^3$

Obs: orice binom are „n+1" termeni

Obs 2: termenul binomului este $\boxed{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k}$ iar rangul său este „k+1"

Obs 3: coeficienții sunt toate numerele ce apar iar coef. binomului sunt doar C_n^k.

Obs 4: $(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} (-b)^k$

Exp 1: $(\sqrt{x} + 5\sqrt[3]{y})^5$, x cere $T_3 = ?$ și coeficientul T_3

$T_3 = C_5^2 (\sqrt{x})^{5-2} (5\sqrt[3]{y})^2 = C_5^2 (\sqrt{x})^3 \cdot 5^2 (\sqrt[3]{y})^2$

$= \dots = 25 \cdot C_5^2$

CONDIȚIA CA UN TERMEN SĂ CONȚINĂ PE x LA O ANUMITĂ PUTERE (sau SĂ NU-L CONȚINĂ PE x)

E_1) se scrie termenul general sub cea mai simplă formă folosind

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

E_2) se pune condiția ca puterea lui x să fie puterea cerută în enunț

E_3) dacă se cere condiția ca un termen să nu-l conțină pe x atunci puterea lui x trebuie să fie egală cu 0

Exemplu: $\left(\sqrt[3]{x} - x\sqrt{x}\right)^{11}$, găsiți termenul ce-l conține pe x^6

E_1) $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = C_{11}^k \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{11-k} \left(-x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)^k =$

$= C_{11}^k x^{\frac{11-k}{3}} \cdot (-1)^k \cdot x^{\frac{3k}{2}} =$

$= (-1)^k C_{11}^k x^{\frac{11-k}{3} + \frac{3k}{2}} =$

$= (-1)^k C_{11}^k x^{\frac{22+7k}{6}}$

E_2) T_{k+1} conține pe $x^6 \Rightarrow$

$\frac{22+7k}{6} = 6 \Rightarrow 22+7k = 36 \Rightarrow$

$7k = 14 \Rightarrow k = 2$

E_3) termenul cerut este

$T_{k+1} = T_{2+1} = (-1)^2 \cdot C_{11}^2 x^{\frac{22+14}{6}} = C_{11}^2 x^6$

Exemplu: $\left(\sqrt[5]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{21}$, Studiați dacă $\exists$ termen ce nu-l conține pe x

E_1) $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = C_{21}^k \left(x^{\frac{1}{5}}\right)^{21-k} \cdot \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^k =$

$= C_{21}^k x^{\frac{21-k}{5} - \frac{k}{2}} = C_{21}^k x^{\frac{42-7k}{10}}$

E_2) T_{k+1} nu conține pe $x \Leftrightarrow$

$42 - 7k = 0 \Leftrightarrow k = 6$

$\Rightarrow \exists$ termen ce nu-l conține pe x și el este T_{k+1} adică T_7

DETERMINAREA NUMĂRULUI DE TERMENI RAȚIONALI (IRAȚIONALI) AI UNEI DEZVOLTĂRI

E_1) se scrie termenul general sub forma cea mai simplă folosind

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$$

E_2) T_{k+1} rațional $\Leftrightarrow$ toate puterile care apar trebuie să fie întregi, unde $k \in \{0; 1; 2; \dots; n\}$

E_3) Rt a găsi câți termeni sunt raționali, sau numărăm valorile lui k obținute mai sus, sau, dacă acest lucru nu e posibil folosim

$$a_n = a_1 + (n-1) r$$

E_4) dacă se cere numărul de termeni iraționali, din numărul total de termeni (care este „n+1") scădem numărul termenilor raționali

Obs.: Atunci când termenul general nu poate fi scris ca o singură putere, trebuie să fim atenți la realizarea intersecției de mulțimi

---

Exp 1.: Găsiți nr. termenilor raționali din $(2+\sqrt[3]{5})^{13}$

E_1) $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = C_{13}^k 2^{13-k} 5^{\frac{k}{3}}$

E_2) $T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} 13-k \in \mathbb{Z} \text{ adev} \\ \frac{k}{3} \in \mathbb{Z} \text{ și cum} \end{cases}$

$k \in \{0; 1; \dots; 13\} \Rightarrow k \in \{0; 3; 6; 9; 12\}$

$\Rightarrow$ 5 termeni raționali

Obs.: deoarece $n = 13$ rezultă sunt $13+1-5 = 9$ termeni iraționali

Exp 2: Găsiți nr. termenilor raționali din $(2+\sqrt[3]{5})^{688}$

E_1) $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k = C_{688}^k 2^{688-k} 5^{\frac{k}{3}}$

E_2) $T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} 688-k \in \mathbb{Z} \\ \frac{k}{3} \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\Rightarrow$

$k \in \{0; 3; 6; \dots; 687\}$

E_3) Obs. că valorile lui k sunt în progresie cu $a_1 = 0$, $a_n = 687$, $r = 3$

$\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1) r \Rightarrow 687 = 0 + (n-1) \cdot 3$

$\Rightarrow 229 = n-1 \Rightarrow n = 230 \Rightarrow$

sunt 230 termeni raționali

E_4) nr. term. iraționali: $689 - 230 = 459$

Exp 3: Găsiți nr. term. raționi $\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt{5}\right)^{213}$

E_1) $T_{k+1} = C_{213}^k \left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{213-k} \left(5^{\frac{1}{2}}\right)^k = C_{213}^k 2^{\frac{213k}{3}} \cdot 3^{\frac{k}{2}}$

E_2) $T_{k+1} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{213-k}{3} \in \mathbb{Z} \\ \frac{k}{2} \in \mathbb{Z} \end{cases}$ și $k \in \{0; 1; \dots; 213\}$

$\Rightarrow \begin{cases} k \in \{0; 3; 6; \dots; 213\} = M_1 \\ k \in \{0; 2; 4; \dots; 212\} = M_2 \end{cases}$

E_3) $k \in M_1 \cap M_2 = \{0; 6; \dots; 210\} \Rightarrow$

progresie, $a_1 = 0$, $a_n = 210$, $r = 6 \Rightarrow$

$210 = 0 + (n-1) 6 \Rightarrow n = 36$

RANGUL CELUI MAI MARE TERMEN AL DEZVOLTĂRII (N2)

E_1) se știe (sau se deduce)

$$\frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{b}{a} \cdot \frac{n-k+1}{k}$$

E_2) se știe că dacă $a, b > 0$ atunci în dezvoltarea $(a+b)^n$ termenii au ordinea $T_1 \le T_2 \le \dots \le T_k \le T_{k+1} \ge T_{k+2} \ge \dots \ge T_{n+1}$

$\Rightarrow T_{k+1}$ este cel mai mare termen

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{T_{k+1}}{T_k} \ge 1 \\ \frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} \cdot \frac{n-k+1}{k} \ge 1 \\ \frac{b}{a} \cdot \frac{n-k}{k+1} \le 1 \end{cases}$$

(unde relația $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}}$ se deduce din $\frac{T_{k+1}}{T_k}$ prin înlocuirea lui k cu $k+1$)

E_3) rezolvăm cele 2 inecuații, obținem $k \in I_1 \cap I_2 \cap \mathbb{Z}$ și va ieși o singură valoare pt k întreagă $\Rightarrow k+1$ este rangul celui mai mare termen

Obs.: $\frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{C_n^k a^{n-k} b^k \cdot b}{C_n^{k-1} a^{n-k+1} \cdot b^{k-1}} =$

$= \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}} \cdot \frac{b}{a} = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{n-k+1}} \cdot \frac{b}{a} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{T_{k+1}}{T_k} = \frac{b}{a} \cdot \frac{n-k+1}{k}$

Obs2.: Din această relație, $k \to k+1$

$\Rightarrow \frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{n-(k+1)+1}{k+1} = \frac{b}{a} \cdot \frac{n-k}{k+1}$

Exp.: Pt $(0,1+1)^{500}$, găsiți rangul celui mai mare termen al dezvoltării.

$$E_1) \begin{cases} \frac{T_{k+1}}{T_k} \ge 1 \\ \frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} \cdot \frac{n-k+1}{k} \ge 1 \\ \frac{b}{a} \cdot \frac{n-k}{k+1} \le 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{0,1} \cdot \frac{500-k+1}{k} \ge 1 \\ \frac{1}{0,1} \cdot \frac{500-k}{k+1} \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 \cdot \frac{501-k}{k} \ge 1 \\ 10 \cdot \frac{500-k}{k+1} \le 1 \end{cases}$$

$$E_2) \begin{cases} 5010 - 10k \ge k \\ 5000 - 10k \le k+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5010 \ge 11k \\ 4999 \le 11k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \le \frac{5010}{11} \\ k \ge \frac{4999}{11} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \le 455,4 \\ k \ge 454,4 \end{cases}$$

$\Rightarrow k \in [454,4\dots ; 455,4\dots] \cap \mathbb{Z}$

$\Rightarrow k = 455$

$\Rightarrow$ rangul este $k+1$ adică rangul este 456

CALCULAREA SUMELOR ELEMENTARE DE COMBINĂRI

(N1)

a) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

b) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = 2^{n-1}$

c) $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}$

d) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots = 0$.

Exemplu: Calculați $S_1 = C_{15}^0 + C_{15}^1 + C_{15}^2 + \dots + C_{15}^{15}$

$S_2 = C_{15}^0 + C_{15}^2 + C_{15}^4 + \dots + C_{15}^{14}$

$S_1 = 2^{15}$ (care nu se calculează)

$S_2 = 2^{15-1} = 2^{14}$ (care nu se calculează)

MATEMATICI FINANCIARE (N3)

1) **Raport procentual**: exprimă câți la sută avem dintr-o cantitate, p%

Exp: într-un vas de 5 l avem 3 l apă, care e gradul de umplere al vasului?

5 l .... 3 l
100 l .... p l $\Rightarrow p = \frac{3 \cdot 100}{5} = 60 \Rightarrow 60\%$ e gradul de umplere cerut

2) **calculul procentelor**: calc $\frac{p}{100} \cdot a$

Exp: un TV se ieftinește cu 10% și costă 1800 lei. Cât costa înainte?

$x - \frac{10}{100} x = 1800 \Leftrightarrow \frac{9}{10} x = 1800 \Leftrightarrow x = \frac{1800 \cdot 10}{9} = 2000$

Obs: se scumpește, se ieftinește, se scumpește apoi ieftinește etc (gimnazii)

3) **dobândă simplă**: e pt o perioadă de timp, ce se adaugă la sumă, poate fi pe an, pe lună, pe nr. de zile $\Rightarrow D_{an} = \frac{S \cdot p \cdot n_{ani}}{100}$, dacă e altceva

$D_{luni} = \frac{S \cdot p \cdot n_{luni}}{100 \cdot 12}$ iar pe zile $D_{zi} = \frac{S \cdot p \cdot n_{zile}}{100 \cdot 365}$ sau 360

Exp.: pt 4 ani, depunem 300 lei cu 2% dobândă simplă $\Rightarrow D_{4ani} = \frac{300 \cdot 2 \cdot 4}{100} = 24$ lei

4) **dobândă compusă**: după perioada expirării termenului, dobânda se adaugă la sumă, de câte ori e < decât cea simplă $D_{ani} = S(1+\frac{p}{100})^{nr\ ani} - S$

Exp: pt 4 ani, depunem 300 lei cu 2% dobândă compusă $\Rightarrow D_{ani} = 300(1+0,02)^4 - 300 = 300 \cdot 1,08243216 - 300 = 324,729648 - 300 = 24,729648$ cu același procent câștigăm 0,7 lei

Exp 2: pt 4 ani, depunem 300 lei cu 1,9% dobândă compusă $\Rightarrow D_4 = 300(1+0,019)^4 - 300 = 300 \cdot 1,078193574 - 300 = 23,458057 \Rightarrow$ pierdem față de dob. simplă

Exp 3: pt 10 ani, depunem 300 lei cu / 40 ani a)
a) 2% simplă b) 1,9% compusă
10 ani

a) $D_{10\ ani} = \frac{300 \cdot 2 \cdot 10}{100} = 60$ lei

b) $D_{comp} = 300(1+0,019)^{10} - 300 = 300 \cdot 1,207096 08 - 300$
$= 62,128824 \Rightarrow$ câștigăm 2,1288... lei

a) 240 lei ... $0489 - 300 = 336,925467$

5) **constituirea unui capital**: se depune în același dată aceeași sumă de lei, cu aceeași dobândă de p% $\Rightarrow C_n = C_0 \cdot \frac{(1+\frac{p}{100})^n - 1}{\frac{p}{100}}$, ultima depunere nu are dobândă $\Rightarrow n-1$ ani

dem: $C_n = C_0(1+\frac{p}{100})^{n-1} + C_0(1+\frac{p}{100})^{n-2} + \dots + C_0 = C_0 \cdot \frac{(1+\frac{p}{100})^n - 1}{\frac{p}{100}}$

Exp.: se depune în fiecare an 600 lei cu d.c. 1,9% pe o perioadă de 4 ani $\Rightarrow C_5 = 600 \cdot \frac{(1,019)^4 - 1}{0,019} = 2469,2706$

6) **amortizarea unei datorii** notată cât, pe n ani cu o dobândă de împrumut de p%

$D_{at}(1+\frac{p}{100})^n = S\frac{(1+\frac{p}{100})^n - 1}{\frac{p}{100}} \Rightarrow S$

Exp.: împrumut 2469,27 lei pe 4 ani cu o dobândă de împrumut de 1,9%, cât dau anual?

$2469,27(1,019)^4 = S \cdot \frac{(1,019)^4 - 1}{0,019} \Rightarrow$

$2662,35104 = S \cdot 4,11545105$

$\Rightarrow S = 646,915978\dots$ lată de 600 cât ar fi dat dacă adunam banii

7) **taxa pe valoarea adăugată** (TVA) se adaugă la prețul cu care un produs pleacă din fabrică spre vânzare. Ea este de .... % (TVAC)

a) colectată (de stat) se aplică produselor proprii
b) deductibilă TVAD când cumpărăm noi fără TVA

dacă TVAC < TVAD $\Rightarrow$ noi avem datorie către stat (de plată)
TVAC > TVAD $\Rightarrow$ de recuperat $\Rightarrow$ regularizare

8) **cost de producție** CTP { cheltuieli fixe: chirii, amortizare, curent, gaz, salarii; variabile: materie primă, manoperă

se calc. cost fix mediu $= \frac{\text{chelt fixe}}{\text{nr. bucăți}}$, cost var. mediu

prețul spre vânzare = CFM + CVM + profit
prețul cu care se vinde = PV + TVA
profit = venit − cost total producție (ăla brut)
profit net = profit brut − impozit pe profit

9) **credite**: suma de plată scade și că dobândă e dob simplă pe suma rămasă, tranșe de credit e aceeași, exp. 10.000 lei pe 10 ani cu 15% simplă

an	Credit rămas	dobândă	tranșă credit	Sumă totală plată
1	100	150	100	250
2	90	135	100	235
3	80	120	100	220
4	70	105	100	205
-	-	-	-	-
-	-	-	-	-
9	20	30	100	130
10	10	15	115	115

$\Rightarrow$ plătit 18.250 lei

10) **amortizare**: o bancă 900 lei, rata anuală 10%, ... cât costă? $\Rightarrow$ rate egale $\Rightarrow$ pe an 90 lei $\Rightarrow$ 10 ... (personal), venit se face pe a...

ELEMENTE DE STATISTICĂ MATEMATICĂ (N3)

1) grupareea unui eșantion reprezentativ după o anumită caracteristică

Exp: clasa elevi după unele caracteristici

sex	media mate	culoarea ochilor	participă la mișcare 5 ori/săpt	etc

2) frecvență absolută: nr. de oameni ce au acea caracteristică, iar frecvență relativă este $\frac{\text{nr. de oameni cu acea caracteristică}}{\text{nr total de oameni}}$

Exp:

media mate	nr. elevi
5	0
6	0
7	2
8	3
9	4
10	22

⇒ frecv. abs. pt media 8 este 3

frecvența relativă pt 8 este $\frac{3}{31}$

3) frecvență cumulată crescător: toate cele relative $\geq x \Rightarrow$ pt media 9: $\frac{4}{31} + \frac{22}{31} = \frac{26}{31}$

frecvență cumulată descrescător: toate cele relative $\leq x$ pt media 9: $\frac{4}{31} + \frac{3}{31} + \frac{2}{31} = \frac{9}{31}$

4) media caracteristicii x se notează

$$\bar{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\text{nr. total}} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 9 + 22 \cdot 10}{31}$$

dar se schimbă ușor în funcție de valori extreme

5) mediana (nu depinde de n_i)

$$\tilde{x} = \begin{cases} x_{\text{mijl}}, & n \text{ impar} \\ \frac{x_{\text{mijl}-1} + x_{\text{mijl}+1}}{2}, & n \text{ par} \end{cases}$$

6) modulul (dominanta) e valoarea caracteristicii cu cea mai mare frecvență, la clasa cu medii ea e 10

7) dispersia (arată cât se depărtează valorile variabilei de media $\bar{x}$) și este

$$v = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum x_i}$$ iar

abatere medie pătratică e $\sqrt{v}$

Obs: dacă dispersia e mai mică, clasa e mai omogenă

PROBABILITĂȚI ELEMENTARE (N3)

1) experiențe aleatoare: nu știm exact ce se întâmplă, de exemplu: aruncarea unui ban (2 cazuri posibile), a unui zar (6 caz pos.), 2 zaruri (36 cazuri pos.)

2) universul probelor se notează Ω, de exp.: pt aruncat ban $\Omega = \{a, b\}$, etc.

3) eveniment sigur, eveniment imposibil. eveniment aleatoriu (toate celelalte) iar op cu evenimente sunt asemenea celor cu mulțimi (negație, reuniune, interes)

4) def probabilități: $P = \frac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr caz posibile}}$

A, B evenimente

Obs1: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$; $P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

Obs2: $P(B \cap \bar{A}) = P(B) - P(A \cap B)$

Obs3: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Obs4: $0 \le P(A) \le 1$; $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

Exp1: $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,5$; $P(A \cup B) = 0,6$

a) $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,6$ b) $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,5$

c) $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0,4 + 0,5 - 0,6 = 0,3$

d) $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,5 - 0,3 = 0,2$

e) $P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0,4 - 0,3 = 0,1$

f) $P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(B) - P(\bar{A} \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,2 = 0,9$

g) $P(A \cup \bar{B}) = P(A) + P(\bar{B}) - P(A \cap \bar{B}) = 0,4 + 0,5 - 0,1 = 0,8$

h) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\bar{A}) + P(\bar{B}) - P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,6 + 0,5 - P(\bar{A} \cap \bar{B})$

și $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) - P(\bar{A} \cap B) = 0,6 - 0,2 = 0,4$

$\Rightarrow P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0,6 + 0,5 - 0,4 = 0,7$

Exp2: O clasă are 30 elevi, 18 fotbal, 12 baschet, 10 fotbal + baschet. Care e probabilitatea să aleg a) 1 de fotbal b) fotbal sau baschet c) nici f nici b?

a) $P(f) = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$; b) $P(f \cup b) = P(f) + P(b) - P(f \cap b) =$

$= 3/5 + \frac{12}{30} - \frac{10}{30}$ c) $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) =$

5) exemple elementare (a arunca mai multe de identic este a arunca același zar de mai multe ori)

Exp: se aruncă 2 zaruri, care e probabilit. de a avea a) un 2 și un 3 b) doi de 1 c) ac. nr. de pct pe fiecare? d) total de 8 pct e) total $\in 5$.

sunt 36 cazuri posibile

2 1 b) $(1,1) \Rightarrow \frac{1}{36}$

c) $(1,1), (3,2), \dots, (6,6) \Rightarrow \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

d) $(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2) \Rightarrow \frac{5}{36}$

e) $(1,1), (1,2), (3,1), (1,3), (3,1), (1,4), (4,1), (2,2), (2,3), (3,2) \Rightarrow \frac{10}{36}$

Exp2: se aruncă un zar de 3 ori, care e prob. de a obț. cel puțin un 1?

sunt $6^3 = 216$ cazuri posibile

dacă A ev să apară cel puțin o dată cifra 1 $\Rightarrow$ e mai ușor $\bar{A} \Rightarrow$ pot fi $\{2, 3, \dots, 6\} \Rightarrow 5^3 \Rightarrow$

$P(\bar{A}) = \frac{125}{216} = 0,57 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - 0,57 = 0,43\dots$

Exp3: avem 2 urne cu bile albe și negre, $U_1(3a, 5n)$ și $U_2(4a, 6n)$ și extragem o bilă, care e prob. de a ieși cel puțin o bilă albă?

A ev. „extragem bilă albă din U_1"

B ev. „extragem bilă albă din U_2"

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{4}{10} - \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10}$

$= 0,625$ (pt că A și B independ $\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Exp4: $U(5r, 6a, 7n)$ și extragem simultan 4, în total pot fi alese $C_{18}^4 = 3060$ moduri de extragere

1) prob. ca toate roșii $= \frac{C_5^4}{C_{18}^4} = \frac{5}{3060} = 0,0016$

2) prob. ca nicio bilă roșie: $\frac{C_{13}^4}{C_{18}^4} = 0,2336$

3) una roșie, una albă: $\frac{C_5^1 C_6^1 C_7^2}{C_{18}^4} = 0,2058$

4) cel puțin 2 roșii: $\frac{C_5^2 C_{13}^2 + C_5^3 C_{13}^1 + C_5^4 C_{13}^0}{C_{18}^4} = 0,2990$

5) cel puțin 3 albe: $\frac{C_6^3 C_{12}^1 + C_6^4}{C_{18}^4} = 0,0833\dots$

Exp5: $U(3a, 4n)$ cu repunere

(a) $\frac{3}{7}$ (a) $(a,a) \Rightarrow \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = \frac{9}{49}$

(a) $\frac{4}{7}$ (n) $(a,n) \Rightarrow 3/7 \cdot 4/7 = 12/49$

(n) $\frac{3}{7}$ (a) $(n,a) \Rightarrow 4/7 \cdot 3/7 = 12/49$

(n) $\frac{4}{7}$ (n) $(n,n) \Rightarrow 4/7 \cdot 4/7 = 16/49$

Exp6: $U(3a, 4n)$ fără repunere

(a) $\frac{2}{6}$ (a) $\Rightarrow (a,a) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{6}{42}$

(a) $\frac{4}{6}$ (n) $\Rightarrow (a,n) \Rightarrow \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} = \frac{12}{42}$

(n) $\frac{3}{6}$ (a) $\Rightarrow (n,a)$: $4/7 \cdot 3/6 = \frac{12}{42}$

(n) $\frac{3}{6}$ (n) $\Rightarrow (n,n)$ $\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{12}{42}$

Exp7: $U(3a, 4n)$, se extrag 3 bile, se cere probab. a (a,n,n) sau altele

Obs: de la exp 5, 6 prob. cond.:

PROBABILITĂȚI CONDIȚIONATE (N3)

Probabilitatea să se realizeze A condiționat de B este $\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$

Exp.: Într-o urnă sunt (8a, 6g, 4n), se extrag 2 bil. Dacă niciuna din aceste 2 nu e galbenă, să se afle probab. ca amîndouă să fie negre

E_1) A evenim. „amîndouă sunt negre"

. B niciuna nu e galbenă $\Rightarrow BCA$

E_2) $P(A \cap B) = \frac{4}{18} \cdot \frac{3}{17}$

$P(B) = \frac{12}{18} \cdot \frac{11}{17}$

E_3) $P_B(A) = \dfrac{\frac{4}{18} \cdot \frac{3}{17}}{\frac{12}{18} \cdot \frac{11}{17}} = \frac{4 \cdot 3}{12 \cdot 11} = \frac{1}{11}$

SCHEME CLASICE DE PROBABILITATE

BILĂ ÎNTOARSĂ

1) schema lui POISSON (binomiala generalizată): fie $A_1, A_2, \dots, A_n$ evenim independ cu $P(A_i)=p_i \Rightarrow$ probabilit să se realizeze k din ele n este coef lui x^k din $(p_1x+q_1)(p_2x+q_2)\dots(p_nx+q_n)$ unde $q_i=1-p_i$

Exp: $U_1(3a,4n)$, $U_2(2a,3n)$, $U_3(4a,4n)$, din fiecare se ia o bilă, care e probab. ca
a) toate albe b) 1 albă, 2 n c) 2a, 1 n

a) A_1 bile din U_1 e a, A_2 bile U_2 e a, A_3 bile U_3 a
$\Rightarrow \left(\frac{3}{7}x+\frac{4}{7}\right)\left(\frac{2}{5}x+\frac{3}{5}\right)\left(\frac{4}{8}x+\frac{4}{8}\right) \Rightarrow$ coef $x^3: \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{8}$

b) același pol $\Rightarrow$ coef $x^1: \frac{3}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{8}$

c) același polinom $\Rightarrow$ coef $x^2: \frac{3}{7}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{8}+\frac{3}{7}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{8}+\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{8}$

2) schema lui BERNOULLI: fie $A_1, A_2, \dots, A_n$ evenim ind echiprobabile $\Rightarrow$ probab să se realizeze k din ele n este coef lui x^k din $(px+q)^n$ adică

$$P(A)=C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (q+px)^n$$

Exp.: se aruncă o monedă de 10 ori, care e probab. ca: a) 3 ori stema b) de cel puțin 6 ori

pol asociat $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)^{10} \Rightarrow$

a) coef x^3: $C_{10}^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10-7}=C_{10}^3\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

b) coef $x^{\geq 6}$: $C_{10}^6\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+C_{10}^7\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+\dots+C_{10}^{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

Exp2: $U(8a, 8n, 8r)$, extragem 10 bile, rezultă $\Rightarrow$ probab a) 3 a b) 4 a

exp: $=\frac{8}{24}=\frac{1}{3} \Rightarrow$ pol $\left(\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}\right)^{10}=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}x\right)^{10}$

a) coef x^3: $C_{10}^3\left(\frac{2}{3}\right)^{10-3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3$

b) coef x^4: $C_{10}^4\left(\frac{2}{3}\right)^{10-4}\left(\frac{1}{3}\right)^4$

BILĂ NEÎNTOARSĂ (hipergeometrică)

1) schema hipergeometrică: avem $U(n_a, n_r)$ (n bile albe, n bile roșii), extragem n bile, care e probab. ca să avem k albe

$$P_n(k)=\frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}$$

Exp: $U(12a, 6r)$, se scot 4 bile, care probab. ca a) (3a, 1r) b) (2a, 2r), c) cel mult 2 r

a) $P_4(3)=\frac{C_{12}^3 C_6^1}{C_{18}^4}$ b) $P_4(2)=\frac{C_{12}^2 C_6^2}{C_{18}^4}$

c) $P_4(n\geq 2)=\frac{C_{12}^2 C_6^2+C_{12}^3 C_6^1+C_{12}^4 C_6^0}{C_{18}^4}$

Exp2: LOTO, 49 nr (9c; 40 2 cifre) se extrag 7

a) prob. ca toate o cifre: $\frac{C_9^7\cdot C_{40}^0}{C_{49}^7}$

b) prob ca toate 2 cifre: $\frac{C_{40}^7\cdot C_9^0}{C_{49}^7}$

c) prob. 2 de o cifră: $\frac{C_9^2\cdot C_{40}^5}{C_{49}^7}$

VARIABILE ALEATOARE

- variabilă aleatoare - este o funcție ce depinde de un fenomen ce se întâmplă,
- repartiția unei variabile aleatoare

$X\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}$ cu p_i probab. să se realizeze x_i; dar asociem lui x_i numere

Exp 1: aruncarea unui zar

$X\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

Exp 2: aruncarea monedei $X\begin{pmatrix} S & B \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

dar asociem nr $\Rightarrow X\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

- valoarea medie a variab aleatoare X

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n$$

- dispersia (variația)

$$V = \Delta^2(x) = M(x^2) - [M(x)]^2$$

Ex: la aruncare zar, $X_i: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M(x) = -1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}3 = -0{,}3 + 0{,}3 = 0$

$X_i^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix} \Rightarrow M(x^2) = 1 \cdot 0{,}3 + 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}3 = 0{,}6$

$\Delta^2(x) = 0{,}6 - 0 = 0{,}6$

Exp 2: $Y: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

$\Delta^2(Y) = M(Y^2) - (M(Y))^2$

$M(Y^2) = 1 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 9 \cdot \frac{1}{2} = \frac{23}{4}$

$(M(Y))^2 = \left(1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16}$

$\Rightarrow \Delta^2(Y) = \frac{23}{4} - \frac{81}{16} = \frac{92 - 81}{16} = \frac{11}{16}$

- abatere medie pătratică

$$\Delta(x) = \sqrt{\Delta^2(x)} = \sqrt{M(x^2) - [M(x)]^2}$$