Data:

CLASA A X-A

SETUL 1
ALGEBRĂ X, partea 1

Prof. Ovidiu Bădescu

Colegiul Național
"Traian Lalescu", Reșița
An școlar __

PUTERI, RADICALI

LOGARITMI

NUMERE COMPLEXE SUB FORMĂ ALGEBRICĂ

NUMERE COMPLEXE SUB FORMĂ TRIGONOMETRICĂ

NUMERE COMPLEXE APLICATE ÎN GEOMETRIE

Nivel 0: **pag**
Nivel *: **pag**
Nivel **: **pag**
Nivel *:** **pag**

TOTAL: **pag**

PROPRIETĂȚI ALE PUTERILOR

N1

1) $a^0 = 1, \forall a \neq 0$

2) $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

3) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$

4) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$

Obs.: nu există numărul 0^0 (nu se poate calcula)

5) $0^a = 0, \forall a \neq 0$

6) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

7) $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

8) $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

Ex.: Calculați

$(2^3 \cdot 4^5) : 8^2$

$(2^3 \cdot 4^5) : 8^2 = (2^3 \cdot (2^2)^5) : (2^3)^2 =$

$= (2^3 \cdot 2^{10}) : 2^6 = 2^{13} : 2^6 =$

$= 2^7$

RADICALI DE ORDIN SUPERIOR

1) $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

2) $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ și $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

3) $\sqrt[n]{x^n} = x$, $\forall\, x \geq 0$ și $\sqrt[n]{x^n} = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$

4) $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x}$

Obs.: ordinul oricărui radical este număr natural ≥ 2

Ex.: $\sqrt[3]{125} = 5$ pt că $5^3 = 125$

Ex 2: $\sqrt[3]{512} = \sqrt[3]{2^9} = 2^{\frac{9}{3}} = 2^3$

Ex 3: $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

Ex 4: $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3^5} = 3^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{5}{4}} =$

$= 3^{\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{5}{4}} = 3^{\frac{8}{4}} = 3^2 = 9$

PROPRIETĂȚI ALE RADICALILOR (N2)

a) $\sqrt[2k]{x^{2k}} = |x|$

b) $\sqrt[2k+1]{x^{2k+1}} = x$

c) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n \cdot m]{x}$

d) $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n \cdot m]{x^m}$

e) $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$

f) $\sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$

g) $x^{2k} = y^{2k} \Rightarrow x = \pm y$

h) $x^{2k+1} = y^{2k+1} \Rightarrow x = y$

Exp 1: $\sqrt{x^2} = 5$, $x = ?$

$\sqrt{x^2} = 5 \Rightarrow |x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5$

Exp 2: $\sqrt[3]{x^3} = 5$, $x = ?$

$\sqrt[3]{x^3} = 5 \Rightarrow x = 5$

Exp 3: $x^6 = 64$, $x = ?$

$x^6 = 64 \Rightarrow x^6 = 2^6 \Rightarrow x = \pm 2$

Exp 4: $x^5 = 32$, $x = ?$

$\ldots^5 = \ldots^5 \Rightarrow x = 2$

CONJUGAT, TIPURI DE CONJUGAT (N2)

NUMĂR	CONJUGAT	REZULTAT
$\sqrt{a}$	$\sqrt{a}$	a
$\sqrt[7]{a^2}$	$\sqrt[7]{a^5}$	a
$\sqrt{a}-\sqrt{b}$	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$	$a-b$
$a-\sqrt{b}$	$a+\sqrt{b}$	a^2-b
* $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$	$a-b$
* $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$	$\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$	$a+b$

Ex.: Rationalizați: a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{1}{2\sqrt{7}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[7]{2^3}}$ d) $\frac{1}{2\sqrt[3]{7}}$ e) $\frac{1}{\sqrt{5}-2}$ f) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ g) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$ h) $\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}}$

a) $\frac{\sqrt{5}\cdot 1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{\sqrt{7}\cdot 1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}$

c) $\frac{\sqrt[7]{2^4}\cdot 1}{\sqrt[7]{2^3}} = \frac{\sqrt[7]{2^4}}{2}$

d) $\frac{\sqrt[3]{7^2}\cdot 1}{2\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{7^2}}{2\cdot 7} = \frac{\sqrt[3]{7^2}}{14}$

e) $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2} = \frac{\sqrt{5}+2}{5-4}$

f) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

g) $\frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}{}$

h) $\frac{1}{2-\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}-\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{8^2}+\sqrt[3]{8\cdot 2}+\sqrt[3]{2^2}}{8-2}$

CONDIȚII PENTRU RADICALI (N1)

TIP I: $\sqrt[2k]{f(x)} = g(x)$ adică ordin par

Cond: $\begin{cases} f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in I_1 \\ g(x) \geq 0 \Rightarrow x \in I_2 \end{cases}$

$I_c = I_1 \cap I_2$

TIP II: $\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x)$ adică ordin impar

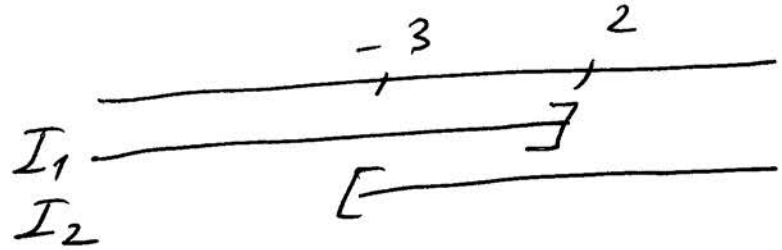
Cond: $x \in \mathbb{R}$ (sau nu punem nicio cond.)

Obs: a pune condiții este același lucru cu a avea sens expresia

Exp: $\sqrt[4]{2-x} = x+3$. Se cere I_c

Cond: $\begin{cases} 2-x \geq 0 \Rightarrow -x \geq -2 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow x \in (-\infty, 2] = I_1 \\ x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow x \in [-3, \infty) = I_2 \end{cases}$

$I_c = I_1 \cap I_2$



$\Rightarrow I_c = [-3, 2]$

Exp 2: $\sqrt[5]{2-x} = x+3$, se cere I_c

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow I_c = \mathbb{R}$

FORMULA RADICALILOR DUBLI (COMPUȘI) (N1)

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \quad \text{și}$$

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}$$

Obs.: formula e utilă doar dacă A^2-B este pătrat perfect (pentru a scăpa de un radical)

Exp: Arătați că $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{12}}$ este natural

$$E_1)\ \sqrt{7-4\sqrt{3}}=\sqrt{7-\sqrt{4^2\cdot 3}}=\sqrt{7-\sqrt{48}}=$$

$$=\sqrt{\frac{7+\sqrt{49-48}}{2}}-\sqrt{\frac{7-\sqrt{49-48}}{2}}=\sqrt{\frac{8}{2}}-\sqrt{\frac{6}{2}}=2-\sqrt{3}$$

$$E_2)\ \sqrt{4-\sqrt{12}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{16-12}}{2}}-\sqrt{\frac{4-\sqrt{16-12}}{2}}=\sqrt{\frac{6}{2}}-\sqrt{\frac{2}{2}}=\sqrt{3}-1$$

$$E_3)\ \sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{4-\sqrt{12}}=2-\sqrt{3}+\sqrt{3}-1=1\in\mathbb{N}$$

Exp 2: Calculați $\sqrt{7+4\sqrt{3}}-\sqrt{3}$

CALCULAREA UNEI SUME DE DOI RADICALI DE ORDIN 3 CONJUGAȚI (N1)

E_1) Se notează cu N numărul cerut $\Rightarrow N=\sqrt[3]{a}\pm\sqrt[3]{b}$

E_2) Se calculează N^3 (se ridică la puterea a 3-a) folosind: $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$ sau

$(a-b)^3=a^3-b^3-3ab(a-b)$

E_3) se înlocuiește $a+b$ sau $a-b$ cu $N\Rightarrow$ ec. de gr III

E_4) se face Horner $\Rightarrow$ $\begin{cases} N_1=d \\ \text{sau} \\ \text{ec. gr II în } N=0 \text{ care are întotdeauna } \Delta<0 \end{cases}$

Exp.: Calculați: $N=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$

E_1) $N=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\,|(\,)^3 \Rightarrow N^3=\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)^3=$

$N^3=20+14\sqrt{2}+20-14\sqrt{2}+3\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})(20-14\sqrt{2})}\left(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\right)$

E_2) $N^3=40+3\sqrt[3]{20^2-(14\sqrt{2})^2}\cdot N\Rightarrow N^3=40+3\sqrt[3]{8}\cdot N\Rightarrow$

$\Rightarrow N^3=40+6N\Rightarrow N^3-6N-40=0$

E_3) Horner, $\Delta_{-40}=\{\pm1,\pm2,\pm4,\pm5,\dots\}$

	N^3	N^2	N	N^0
	1	0	−6	−40
1	1	1	−5	−45 ≠ 0
2	1	2	−2	−44 ≠ 0
4	1	4	10	0

$\Rightarrow (N-4)(N^2+4N+10)=0\Rightarrow \begin{cases} N=4 \\ \text{sau} \\ N^2+4N+10=0 \end{cases}$

$\Delta=16-40<0$ Fals

$\Rightarrow N=4$

DEFINIȚIA LOGARITMULUI. SCRIEREA UNUI NUMĂR CA UN LOGARITM

(N1)

DEFINIȚIE

$\log_b A = N \Leftrightarrow A = b^N$

Obs.: b se numește bază

A se numește argument

SCRIEREA UNUI NR. CA LOG.

folosim $N = \log_b b^N$

Ex 1: $x = ?$ dacă

a) $\log_2 x = 5$

b) $\log_x 8 = 3$

c) $\log_2 \frac{1}{4} = x$

---

a) $\log_2 x = 5 \Leftrightarrow x = 2^5 = 32$

b) $\log_x 8 = 3 \Leftrightarrow 8 = x^3 \Leftrightarrow x = 2$

c) $\log_2 \frac{1}{4} = x \Leftrightarrow \frac{1}{4} = 2^x$

$\Leftrightarrow 2^{-2} = 2^x \Rightarrow x = -2$

Ex: scrieți pe $N = 3$ în baza

a) $b = 2$ b) $b = 3$ c) $b = \frac{1}{2}$

---

a) $3 = \log_2 2^3 \Rightarrow 3 = \log_2 8$

b) $3 = \log_3 3^3 \Leftrightarrow 3 = \log_3 27$

c) $3 = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \Leftrightarrow 3 = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{8}$

CONDIȚII CE APAR LA LOGARITMI

Dacă $\log_b A = N \Rightarrow$

cond.: $\begin{cases} b>0 \Rightarrow x \in I_1 \\ b \neq 1 \Rightarrow x \in I_2 \\ A>0 \Rightarrow x \in I_3 \end{cases} \Rightarrow I_C = I_1 \cap I_2 \cap I_3$

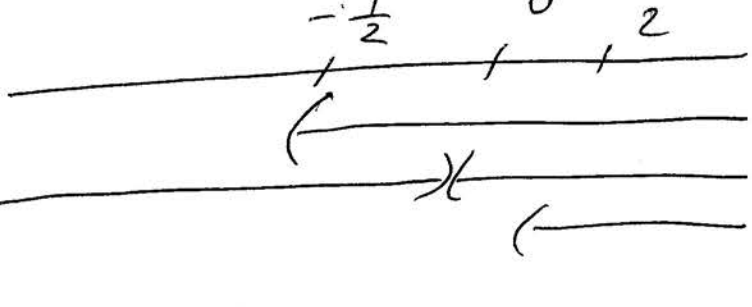
Obs.: Dacă b sau A sunt numere, atunci pentru ele nu se mai pun condiții

Exp 1: $\log_{2x+1}(3x-6)$, x care I_C

Cond: $\begin{cases} 2x+1>0 \Rightarrow 2x>-1 \Rightarrow x>-\frac{1}{2} \Rightarrow x \in (-\frac{1}{2}, \infty) \\ 2x+1 \neq 1 \Rightarrow 2x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty) \\ 3x-6>0 \Rightarrow 3x>6 \Rightarrow x>2 \Rightarrow x \in (2, \infty) \end{cases}$

$I_C = I_1 \cap I_2 \cap I_3$

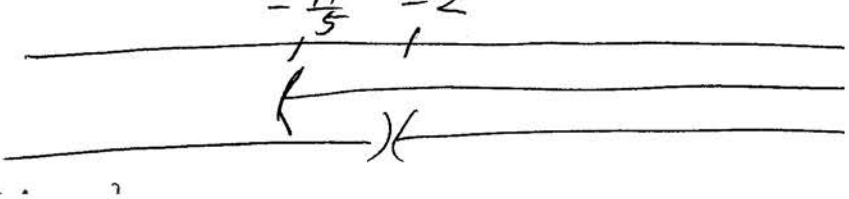
$\Rightarrow I_C = (2, \infty)$



Exp 2: $\log_{5x+11} 4$, x care I_C

Cond: $\begin{cases} 5x+11>0 \Rightarrow x>-\frac{11}{5} \Rightarrow x \in (-\frac{11}{5}, \infty) = I_1 \\ 5x+11 \neq 1 \Rightarrow x \neq -2 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (-2, \infty) = I_2 \end{cases}$

$I_C = I_1 \cap I_2$



PROPRIETĂȚI ALE LOGARITMILOR (N1)

a) $\log_b 1 = 0$

b) $\log_b b = 1$

c) $\log_b A + \log_b B = \log_b (A \cdot B)$

d) $\log_b A - \log_b B = \log_b \frac{A}{B}$

e) $\log_b A^n = n \log_b A$

f) $\log_{b^n} A = \frac{1}{n} \log_b A$

g) $\log_b \sqrt[n]{A} = \frac{1}{n} \log_b A$

h) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

i) $a^{n \log_b c} = c^{n \log_b a}$

j) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

k) schimbarea bazei: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Obs: logaritm zecimal $\boxed{\log_{10} A = \lg A}$

logaritm natural $\boxed{\log_e A = \ln A}$ unde

$e = 2,7\ldots$ nr. EULER.

Ex: Calculați: a) $\log_2 5 + \log_8 81$

b) Schimbați în baza 3 numărul $\log_2 7$

---

a) $\log_2 5 + \log_8 81 = \log_2 5 + \log_{2^3} 3^4 =$

$= \log_2 5 + \frac{1}{3} \cdot 4 \log_2 3 = \log_2 5 + \frac{4}{3} \log_2 3 =$

$= \log_2 5 + \log_2 3^{\frac{4}{3}} = \log_2 (5 \cdot 3^{\frac{4}{3}})$

b) $\log_2 7 = \frac{\log_3 7}{\log_3 2}$

COMPARARE DE EXPONENȚIALE, LOGARITMI, RADICALI (N1)

1) COMPARARE EXPONENȚIALE

$b \in (0;1)$ avem $(b^x < b^y \Leftrightarrow x > y)$

$b \in (1;\infty)$ avem $(b^x < b^y \Leftrightarrow x < y)$

2) COMPARARE LOGARITMI

$b \in (0;1)$ avem $(\log_b x < \log_b y \Leftrightarrow x > y)$

$b \in (1;\infty)$ avem $(\log_b x < \log_b y \Leftrightarrow x < y)$

3) COMPARARE DE RADICALI DE ORDIN DIFERIT

E_1) se aduc la același ordin folosind $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n \cdot p]{x^p}$

E_2) se compară cantitățile de sub radicali

Exp 1: rezolvați

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^5$

b) $\left(\frac{5}{2}\right)^2 < \left(\frac{5}{2}\right)^x$

---

a) $b = \frac{2}{3} \in (0;1)$ și $\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^5$

$\Rightarrow x < 5 \Rightarrow x \in (-\infty; 5)$

b) $b = \frac{5}{2} \in (1;\infty)$ și $\left(\frac{5}{2}\right)^2 < \left(\frac{5}{2}\right)^x$

$\Rightarrow 2 < x \Rightarrow x \in (2;\infty)$

Exp 2: rezolvați

a) $\log_5 x < \log_5 2$

b) $\log_{\frac{2}{5}} x < \log_{\frac{2}{5}} 3$

---

a) Cond: $x > 0 \Rightarrow x \in (0;\infty)$

$b = 5 > 1$ și $\log_5 x < \log_5 2$

$\Rightarrow x < 2 \xrightarrow{\text{cond}} x \in (0;2)$

b) Cond.: $x > 0 \Rightarrow x \in (0;\infty)$

$b = \frac{2}{5} \in (0;1)$ și $\log_{\frac{2}{5}} x < \log_{\frac{2}{5}} 3$

Exp 3: comparați $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[6]{13}$

---

ordinul comun este 6

$\Rightarrow a = \sqrt{5} = \sqrt[2\cdot3]{5^3} = \sqrt[6]{125}$

$b = \sqrt[3]{2} = \sqrt[3\cdot2]{2^2} = \sqrt[6]{4}$

$c = \sqrt[6]{13}$

Deoarece $4 < 13 < 125$

$\Rightarrow b < c < a$

Exp 4: Comparați $\log_3 5$ cu 2

E_1) $2 = \log_3 3^2 = \log_3 9$

E_2) $b = 3 > 1$ și $5 < 9$

$\Rightarrow \log_3 5 < \log_3 9 \Rightarrow \log_3 5 < 2$

FORMA ALGEBRICĂ A NUMERELOR COMPLEXE

1) $\mathbb{C} = \{a+bi \mid a,b \in \mathbb{R} \text{ și } i^2 = -1\}$, de obicei nr. complexe se notează cu z

Exp 1: $z = 2 \in \mathbb{C}$ pt că $a=2, b=0$

$z = 4-5i \in \mathbb{C}$ pt că $a=4, b=-5$

$z = -2i \in \mathbb{C}$ pt că $a=0, b=-2$

Obs 1: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, adică orice număr real e complex

2) dacă $z = a+bi \Rightarrow$ parte reală este a, not $\operatorname{Re} z = a$

parte imaginară este bi

coef părții imaginare este b, not $\operatorname{Im} z = b$

$\Rightarrow z = \operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z \cdot i$, deci $\operatorname{Re} z \in \mathbb{R}$ și $\operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$

Exp: $z = 7-2i \Rightarrow \operatorname{Re} z = 7, \operatorname{Im} z = -2$

3) număr PUR COMPLEX $\Leftrightarrow z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Leftrightarrow b \neq 0$

număr PUR IMAGINAR $\Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^* i \Leftrightarrow \begin{cases} z = bi \\ b \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$

număr REAL $\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow b = 0$

Exp: $z_1 = 3i$ e PUR IMAGINAR și PUR COMPLEX

$z_2 = 2-5i$ e PUR COMPLEX, nu e PUR IMAGINAR

4) AFIXUL PUNCTULUI $M(a,b)$ este $z = a+bi$

IMAGINEA NUMĂRULUI COMPLEX $z = a+bi$ este $M(a,b)$

Exp: afixul pt $M(-1,3)$ este $z = -1+3i$

imaginea pt $z = 3-5i$ este $M(3,-5)$

OPERAȚII CU NR. COMPLEXE (N1)

1) EGALITATEA: Dacă $\left.\begin{matrix} a+bi=c+di \\ a,b,c,d\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$

2) ADUNARE, SCĂDERE, ÎNMULȚIRE, ÎMPĂRȚIRE, PUTERE

Dacă $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i \Rightarrow$

a) $z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

b) $z_1-z_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$

c) $z_1\cdot z_2=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=a_1a_2+a_1b_2i+b_1a_2i+b_1b_2i^2$

$\Rightarrow z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)i$

d) $z_1:z_2=\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}\overset{\cdot\frac{a_2-b_2i}{a_2-b_2i}}{=}\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{(a_2+b_2i)(a_1-b_2i)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$

e) $z_1^n=(a_1+b_1i)^n$ și sau formulă, sau înmulțim parantezele

Obs.: nu se memorează relațiile ci se calculează pentru exemplele noastre

Exp1: $x,y\in\mathbb{R}$, $x,y=?$ dacă $3-2x+(5-y)i=y-x+3xi$

Din $\left.\begin{matrix} 3-2x+(5-y)i=y-x\ 5xi \\ x,y\in\mathbb{R} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 3-2x=y-x \\ 5-y=3x \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -x-y=-3 \\ -3x-y=-5 \end{cases} \Big|\cdot(-1)$ și adun $\Rightarrow -2x=-2 \Rightarrow \boxed{x=1}$

$\Rightarrow -1-y=-3 \Rightarrow \boxed{y=2}$

Exp2: $z_1=5-4i$, $z_2=3+2i$, se cere a) z_1+z_2 b) $z_1\cdot z_2$ c) $z_1:z_2$ d) z_1^2

a) $z_1+z_2=(5-4i)+(3+2i)=(5+3)+(-4+2)i=8-2i$

b) $z_1\cdot z_2=(5-4i)(3+2i)=15+10i-12i-8i^2=(15+8)+(10-12)i=23-2i$

c) $z_1:z_2=\frac{5-4i}{3+2i}\overset{\cdot 3-2i}{=}\frac{(5-4i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{15-10i-12i-8i^2}{3^2-4i^2}=\frac{23-22i}{25}=\frac{23}{25}-\frac{22}{25}i$

d) $z_1^2=(5-4i)^2=25-40i+16i^2=25-40i-16=9-40i$

CALCULAREA PUTERILOR LUI i (N1)

$i^0 = 1$ $\quad i^{4n} = i^0 = 1$

- deoarece $i^1 = i$ $\quad i^{4n+1} = i^1 = i$

$i^2 = -1 \Rightarrow$ $\quad i^{4n+2} = i^2 = -1$

$i^3 = -i$ $\quad i^{4n+3} = i^3 = -i$

$i^4 = 1$

- pentru a calcula puterile mari ale lui i, împărțim puterea la 4, scriem proba împărțirii și folosim relațiile de mai sus

Exp.: $i^{2475} = ?$

$2475 \mid 4$

$24 \quad 618$

$==7$

4

35

32

$=3$

$\Rightarrow 2475 = 4 \cdot 618 + 3$

$\Rightarrow i^{2475} = i^{4 \cdot 618 + 3} = i^3 = -i$

CONJUGATUL UNUI NUMĂR COMPLEX (N1)

- dacă $z = a+bi \Rightarrow \bar{z} = a-bi$

Obs.: conjugatul schimbă semnul din fața lui i

Obs 2.: conjugatul are proprietățile:

a) $\overline{z_1+z_2} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$

b) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z_1} \cdot \bar{z_2}$

c) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z_1}}{\bar{z_2}}$

d) $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

Obs 3.: $z+\bar{z} = (a+bi)+(a-bi) = 2a \Rightarrow z+\bar{z} \in \mathbb{R}$

$z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2-(bi)^2 = a^2+b^2 \Rightarrow z \cdot \bar{z} \in \mathbb{R}$

$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Exp 1: $z = 4-3i \Rightarrow \bar{z} = 4+3i$

Exp 2.: $z = -3i \Rightarrow \bar{z} = 3i$

Exp 3: $z = 5 \Rightarrow \bar{z} = 5$

Exp 4: $z = \left(\frac{5-2i}{5+2i}\right)^5 \Rightarrow \bar{z} = \overline{\left(\frac{5-2i}{5+2i}\right)^5} = \left(\overline{\frac{5-2i}{5+2i}}\right)^5 =$

$= \left(\frac{\overline{5-2i}}{\overline{5+2i}}\right)^5 = \left(\frac{5+2i}{5-2i}\right)^5$

CUM ARĂTĂM CĂ UN NUMĂR COMPLEX ESTE REAL SAU CĂ ESTE PUR IMAGINAR (N2)

1) $z \in \mathbb{R} \hookrightarrow$ (z real) $\begin{cases} \text{met I}: & b=0 \\ \text{met II}; & \bar{z}=z \end{cases}$

2) $z \in \mathbb{R}^* \cdot i \hookrightarrow$ (z pur imaginar) $\begin{cases} \text{met I}: & \begin{cases} a=0 \\ b \neq 0 \end{cases} \\ \text{met II}: & \begin{cases} z \neq 0 \\ \bar{z}=-z \end{cases} \end{cases}$

Exp 1: arătați că $z \in \mathbb{R}$ unde $z=(3+2i)^n+(3-2i)^n$

E_1) nu putem calcula z, deci nu putem folosi met I, adică nu putem arăta că $b=0$

E_2) arătăm că $\bar{z}=z$

$\bar{z}=\overline{(3+2i)^n+(3-2i)^n}=$

$=\overline{(3+2i)^n}+\overline{(3-2i)^n}=$

$=(\overline{3+2i})^n+(\overline{3-2i})^n=$

$=(3-2i)^n+(3+2i)^n=z$

E_3) din $\bar{z}=z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$

Exp 2: arătați că $z \in \mathbb{R}^* \cdot i$, unde $z=(5-7i)^n-(5+7i)^n$

E_1) nu putem calcula z, deci nu putem arăta că $a=0$

E_2) arătăm că $\bar{z}=-z$ și că $z \neq 0$

E_3) $\bar{z}=\overline{(5-7i)^n-(5+7i)^n}=$

$=\overline{(5-7i)^n}-\overline{(5+7i)^n}=$

$=(\overline{5-7i})^n-(5+7i)^n=$

$=(5+7i)^n-(5-7i)^n=-z$

E_4) arăt. că $z \neq 0$ prin (R.A.)

Pp. $z=0 \Rightarrow (5-7i)^n=(5+7i)^n$

$\Rightarrow \left(\frac{5-7i}{5+7i}\right)^n=1 \Rightarrow \left(\frac{(5-7i)^2}{25+49}\right)^n=1$

$\Rightarrow \left(\frac{25-70i-49}{74}\right)^n=1$, U.O.

E_5) deci, $z=-\bar{z}$ și $z \neq 0 \Rightarrow z$ pur imaginar

Exp 3.: $a \in \mathbb{R}$, $a=?$ dacă $\frac{a+i}{2+i} \in \mathbb{R}$

E_1) Fie $z=\frac{a+i}{2+i}=\frac{(a+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=$

$=\frac{2a-ai+2i+1}{4+1}=\frac{2a+1}{5}+\frac{2-a}{5}i$

E_2) $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{2-a}{5}=0 \Leftrightarrow a=2$

met II: folosim că $\bar{z}=z$

$\bar{z}=z \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{a+i}{2+i}\right)}=\frac{a+i}{2+i} \Leftrightarrow$

$\frac{\overline{a+i}}{\overline{2+i}}=\frac{a+i}{2+i} \Leftrightarrow \frac{a-i}{2-i}=\frac{a+i}{2+i}$

$\Leftrightarrow (a-i)(2+i)=(a+i)(2-i) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2a+ai-2i+1=2a-ai+2i+1$

$\Leftrightarrow 2ai-4i=0 \Leftrightarrow (2a-4)i=0$

$\Leftrightarrow a=2$

MODULUL UNUI NUMĂR COMPLEX

$z = a + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Obs.: $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ și $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ și

$|z^n| = |z|^n$ și $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

Exp.: $z = 2 - 3i$, $|z| = ?$

$$|z| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

Exp2: $z = \frac{7 + 12i}{-12 + 7i}$, $|z| = ?$

$$|z| = \left|\frac{7+12i}{-12+7i}\right| = \frac{|7+12i|}{|-12+7i|} = \frac{\sqrt{7^2+12^2}}{\sqrt{(-12)^2+7^2}} =$$

Exp3: $z = (2-3i)^{200}$, $|z| = ?$

$$|z| = \left|(2-3i)^{200}\right| = |2-3i|^{200} =$$

$$= \left(\sqrt{2^2+(-3)^2}\right)^{200} = \sqrt{13}^{200} =$$

$$= 13^{100}$$

REZOLVAREA ECUAȚIILOR DE GRII ÎN NUMERE COMPLEXE (N1)

E_1) se folosește $z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

E_2) dacă $\Delta=-d<0 \Rightarrow \Delta=di^2$

dacă $\Delta=a+bi$, se încearcă scrierea lui $a+bi$ ca $(m+ni)^2$ folosind că $i^2=-1$.

Dacă nu intuim $(m+ni)^2$, atunci notăm $a+bi=(m+ni)^2 \Leftrightarrow$

$a+bi=m^2+2mni-n^2 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} m^2-n^2=a \\ 2mn=b \end{cases}$ și este un sistem omogen, care se rezolvă prin metoda cunoscută

Ex 1: rezolvați: $z^2+z+5=0$

$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1-20}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm\sqrt{-19}}{2}$

$z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{19i^2}}{2}=\frac{-1\pm i\sqrt{19}}{2}$

Ex 2: rezolvați $z^2+iz-i-1=0$

$z_{1,2}=\frac{-i\pm\sqrt{i^2-4\cdot 1(-i-1)}}{2\cdot 1}=\frac{-i\pm\sqrt{i^2+4i+4}}{2}$

$=\frac{-i\pm\sqrt{(i+2)^2}}{2}=\frac{-i\pm(i+2)}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} z_1=\frac{-i+i+2}{2}=1 \\ z_2=\frac{-i-i-2}{2}=-i-1 \end{cases}$

Ex 3: rezolvați $z^2+iz-i-1=0$

$z_{1,2}=\frac{-i\pm\sqrt{i^2-4\cdot 1(-i-1)}}{2\cdot 1}=\frac{-i\pm\sqrt{i^2+4i+4}}{2}$

Dacă nu observăm scrierea ca pătrat perfect pt. i^2+4i+4 atunci

$z_{1,2}=\frac{-i\pm\sqrt{-1+4i+4}}{2}=\frac{-i\pm\sqrt{3+4i}}{2}$

Fie $3+4i=(m+ni)^2 \Rightarrow 3+4i=m^2+2mni-n^2$

$\Rightarrow \begin{cases} m^2-n^2=3 \\ 2mn=4 \end{cases}$, sistem omogen

notăm $n=tm \Rightarrow$

$\begin{cases} m^2-t^2m^2=3 \\ m\cdot tm=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2(1-t^2)=3 \\ tm^2=2 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{m^2(1-t^2)}{m^2t}=\frac{3}{2} \Rightarrow 2-2t^2=3t$

$\Rightarrow 2t^2+3t-2=0$

$t_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}$ $\begin{matrix}\nearrow \frac{1}{2} \\ \searrow -2\end{matrix}$

Cazul I: $t=\frac{1}{2}$ și $tm^2=2 \Rightarrow \frac{1}{2}m^2=2$

$\Rightarrow m^2=4 \Rightarrow m=\pm 2$ și $n=tm$

$\Rightarrow$ 1) $m_1=2$, $n_1=\frac{1}{2}\cdot 2=1$

$\Rightarrow 3+4i=(2+i)^2$

2) $m_2=-2$, $n_1=\frac{1}{2}\cdot(-2)=-1$

$\Rightarrow 3+4i=(-2-i)^2$

Cazul II: $t=-2$ și $tm^2=2 \Rightarrow -2m^2=2$

$\Rightarrow m^2=-1$ și $m\in\mathbb{R}$, k.o.

Deci, $z_{1,2}=\frac{-i\pm(2+i)}{2}$ etc

PROPRIETĂȚI ALE NUMERELOR COMPLEXE SUB FORMĂ ALGEBRICĂ

(N3)

1) $|z_1 - z_2| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

2) $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

3) $|z_1 + z_2|^2 + |z_2 + z_3|^2 + |z_3 + z_1|^2 =$

$= |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2$

4) ineg HLAWKA

$|z_1 + z_2| + |z_2 + z_3| + |z_3 + z_1| \leq$

$\leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1 + z_2 + z_3|$

FORMA TRIGONOMETRICĂ A NR. COMPLEXE (N2)

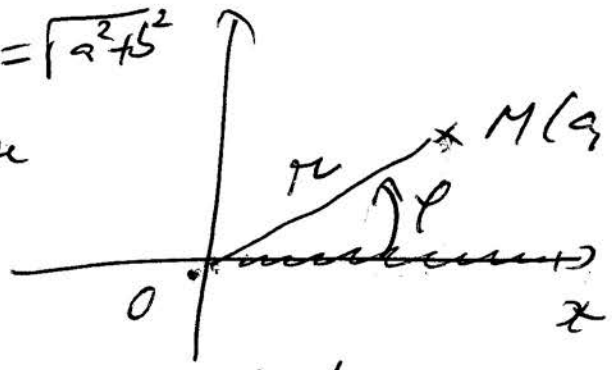
$z = a + bi$ formă algebrică

se cere $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, formă trigonometrică

$\varphi \in [0; 2\pi)$

$E_1)$ $M(0,0) \Leftrightarrow z = 0 \Rightarrow r = \sqrt{a^2+b^2}$

$\Rightarrow r = 0$, φ oarecare



$E_2)$ $M \in$ unei axe

$\Rightarrow r = \sqrt{a^2+b^2}$, φ se găsește direct

$E_3)$ $M \in$ Cadranelor $\Rightarrow r = \sqrt{a^2+b^2}$ iar

$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + k\pi$, $k=0$ dacă $M \in$ Cd I

$k=1$ dacă $M \in$ Cd II ∪ Cd III

$k=2$ dacă $M \in$ Cd IV

Exp 1; $z = -3i$

$M(0;-3) \in Oy-$



$r = \sqrt{0^2+(-3)^2} = 3$

$M \in Oy$ negativ $\Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow z = 3(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

Exp 2; $z = -1 + i\sqrt{3}$

$M(-1;\sqrt{3}) \in$ Cd II $\Rightarrow r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$,

$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) + k\pi \Rightarrow \varphi = -\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}$

$/ = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$

OPERAȚII CU NUMERE COMPLEXE SUB FORMĂ TRIGONOMETRICĂ

(N2)

$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$

$(z_1)^n = (r_1)^n(\cos(n\varphi_1) + i\sin(n\varphi_1))$

$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{r_1}(\cos(-\varphi_1) + i\sin(-\varphi_1))$

Obs 1: dacă $z = \cos\varphi + i\sin\varphi \Rightarrow$
$z^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)$ (adică $r=1$)

Obs 3.: dacă rezultatele pentru argumentul numerelor complexe obținute ca rezultat nu sunt în $[0; 2\pi)$, reducem argumentul la $[0; 2\pi)$ prin adunare sau scădere de multipli de 2π

Obs 3: dacă $z = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) \Rightarrow$
$z = r(\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi))$ și aplicăm formulele anterioare

---

Ex 1: $z_1 = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$

$z_2 = 3(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$. Să se:

a) $z_1 \cdot z_2$; b) $\frac{z_1}{z_2}$;

c) $(z_1)^{23}$

---

a) $z_1 \cdot z_2 = 2\cdot 3(\cos(\frac{5\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}))$

$= 6(\cos\frac{13\pi}{6} + i\sin\frac{13\pi}{6})$

Dar, $\frac{13\pi}{6} \notin [0; 2\pi)$ și $\begin{array}{r|l} 13 & 6 \\ 12 & 2 \\ =1 & \end{array}$

$\Rightarrow \frac{13\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow$

$z_1 \cdot z_2 = 6(\cos(\frac{\pi}{6} + 2\pi) + i\sin(\frac{\pi}{6} + 2\pi)) =$

$= 6(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}(\cos(\frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{6} - \frac{4\pi}{3}))$

$= \frac{2}{3}(\cos(-\frac{3\pi}{6}) + i\sin(-\frac{3\pi}{6})) =$

$= \frac{2}{3}(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}))$

Dar, $-\frac{\pi}{2} \notin [0; 2\pi) \Rightarrow$ adunăm multipli de 2π și cum $-\frac{\pi}{2} + 2\pi = \frac{3\pi}{2} \in [0; 2\pi) \Rightarrow 2\pi$ e OK

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{3}(\cos(-\frac{\pi}{2} + 2\pi) + i\sin(-\frac{\pi}{2} + 2\pi)) =$

$= \frac{2}{3}(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2})$

c) $(z_1)^{23} = 2^{23}(\cos(23\cdot\frac{5\pi}{6}) + i\sin(23\cdot\frac{5\pi}{6}))$

$= 2^{23}(\cos\frac{115\pi}{6} + i\sin\frac{115\pi}{6})$

Cum $\frac{115\pi}{6} \notin [0; 2\pi)$, $\begin{array}{r|l} 115 & 6 \\ 6 & 19 \\ 55 & \\ 54 & \\ =1 & \end{array}$

$\Rightarrow \frac{115\pi}{6} = 19\pi + \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow (z_1)^{23} = 2^{23}(\cos(\frac{\pi}{6} + 19\pi) + i\sin(\frac{\pi}{6} + 19\pi))$

$= 2^{23}(\cos(\frac{\pi}{6} + \pi) + i\sin(\frac{\pi}{6} + \pi)) =$

$= 2^{23}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6})$

RĂDĂCINILE DE ORDIN n (N2)

DIN NR. COMPLEX

Se cere rezolvarea lui $z^n = \alpha$

E_1) $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ adică îl scriem pe α trigonometric

E_2) Aplic formula rădăcinilor

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

$$k = \overline{0, n-1}$$

Ex 1: $z^3 = -1 + i\sqrt{3}$

E_1) $\alpha = -1 + i\sqrt{3}$ scriu trig $\Rightarrow \alpha = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$E_2)\ z_k = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}\right)$$

$$k = \overline{0,2}$$

$k=0 \Rightarrow z_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right)$

$k=1 \Rightarrow z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right)$

$k=2 \Rightarrow z_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right)$

RĂDĂCINILE DE ORDIN n ALE UNITĂȚII

Se cere rezolvarea ecuației

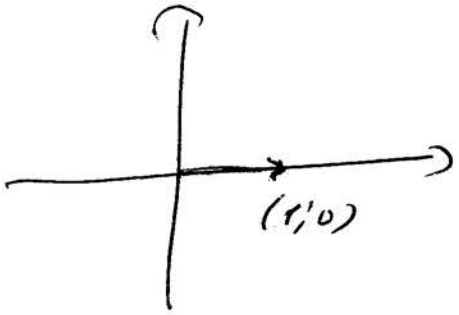
$$z^n = 1$$

$\Rightarrow$ formula rădăcinilor este

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}$$

demonstrație:

$E_1)\ \alpha = 1 = 1(\cos 0 + i\sin 0)$



$E_2)\ z^n = 1(\cos 0 + i\sin 0)$

$$\Rightarrow z_k = \sqrt[n]{1}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{n} + i\sin\frac{0+2k\pi}{n}\right), \quad k = \overline{0, n-1}$$

Exp: se cere rezolvare $z^4 = 1$

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}, \quad k = \overline{0,3}$$

$$\Rightarrow z_k = \cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}, \quad k = \overline{0,3}$$

$k = 0 \Rightarrow z_0 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$k = 1 \Rightarrow z_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$

$k = 2 \Rightarrow z_2 = - - - -$

$= - - n - -$, nu se pot calcula

RĂDĂCINILE PUR COMPLEXE DE (N2) ORDIN 3 ALE UNITĂȚII (RESPECTIV ALE LUI $\alpha=-1$)

$(\alpha^3=1, \alpha\notin\mathbb{R}) \Leftrightarrow (\alpha^2+\alpha+1=0) \Leftrightarrow (\alpha_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2})$

dem:

$\alpha^3=1 \Leftrightarrow \alpha^3-1=0 \Leftrightarrow (\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$

$\Leftrightarrow$ $\alpha=1\in\mathbb{R}$, k.o. sau $\alpha^2+\alpha+1=0$ ok

$\alpha^2+\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha_{1,2}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$

$(\alpha^3=-1, \alpha\notin\mathbb{R}) \Leftrightarrow (\alpha^2-\alpha+1=0) \Leftrightarrow (\alpha_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2})$

dem:

$\alpha^3=-1 \Leftrightarrow \alpha^3+1=0 \Leftrightarrow (\alpha+1)(\alpha^2-\alpha+1)=0$

$\Leftrightarrow$ $\alpha=-1\in\mathbb{R}$ k.o. sau $\alpha^2-\alpha+1=0$ ok

$\alpha^2-\alpha+1=0 \Leftrightarrow \alpha_{1,2}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$

Exp 1: dacă $z^2-z+1=0$, calculați $N=z^{10}+\frac{1}{z^{10}}$

$E_1)$ $z^2-z+1=0 \Leftrightarrow (z^3=-1, z\notin\mathbb{R})$

$E_2)$ $N=(z^3)^3\cdot z+\frac{1}{(z^3)^3\cdot z}=-z+\frac{1}{-z}=$

$=-(z+\frac{1}{z})=-\frac{z^2+1}{z}$

$E_3)$ din $z^2-z+1=0 \Rightarrow z^2+1=z$

$\Rightarrow N=-\frac{z^2+1}{z}=-\frac{z}{z}=-1$

Exp 2: dacă $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, să se

$N=z^8-\frac{1}{z^7}$

$E_1)$ $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \Rightarrow (z^3=1, z\neq 1)$

$E_2)$ $N=(z^3)^2\cdot z^2-\frac{1}{(z^3)^2 z}=z^2-\frac{1}{z}=$

$=\frac{z^3-1}{z}=\frac{0}{z}=0$

REZOLVAREA ECUAȚIILOR DE FORMA $z^n = \bar{z}$ (N2)

Se cere $z^n = \bar{z}$, se cer rădăcinile

E_1) Se trece la modul $\Rightarrow |z^n| = |\bar{z}|$

E_2) Se folosește $|z^n| = |z|^n$ și $|\bar{z}| = |z|$

E_3) Obținem $|z|^n = |z| \Rightarrow |z|(|z|^{n-1} - 1) = 0$

$\Rightarrow$ $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ sau $|z|^{n-1} = 1 \Rightarrow |z| = \pm 1$, dar $|z| > 0 \Rightarrow |z| = 1$

E_4) Din $|z| = 1$ și din $z^n = \bar{z} \mid \cdot z \Rightarrow$

$z^{n+1} = z \cdot \bar{z}$. Dar, $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \Rightarrow z \cdot \bar{z} = 1$

E_5) $z^{n+1} = 1 \Rightarrow z_k = \cos\frac{2k\pi}{n+1} + i\sin\frac{2k\pi}{n+1}$, $k = \overline{0, n}$

Exp: Rezolv. $z^3 = \bar{z}$

E_1) $z^3 = \bar{z} \mid |\cdot| \Rightarrow |z^3| = |\bar{z}| \Rightarrow |z|^3 = |z| \Rightarrow$

$\Rightarrow |z|(|z|^2 - 1) = 0$ $\Leftarrow$ $|z| = 0 \Rightarrow \boxed{z = 0}$ sau $|z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = \pm 1$ și $|z| > 0 \Rightarrow |z| = 1$

E_2) $z^3 = \bar{z} \mid \cdot z \Rightarrow z^4 = z \cdot \bar{z} \Rightarrow z^4 = |z|^2 \Rightarrow z^4 = 1$

$z_k = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4}$, $k = \overline{0, 3}$ și calculăm rădăcinile

APLICAȚII ALE NUMERELOR COMPL. ÎN GEOMETRIE

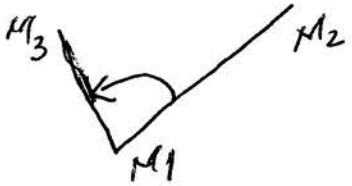
(N3)

1) $dist(M_1, M_2) = |z_2 - z_1|$

2) rotația de centru $M_0(z_0)$ și $M(z)$ cu unghiul orientat α ne dă $M'(z')$ cu $\boxed{z' - z_0 = (z - z_0)\varepsilon}$, $\varepsilon = \cos t + i \sin t$

3) $m(\sphericalangle M_2 M_1 M_3) = \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$

4) $m(M_1M_3, M_2M_4) = \arg \frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_1}$





5) M_1, M_2, M_3 coliniare $\Leftrightarrow \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*$
(sau orice alt raport de ac. tip)

6) M_1, M_2, O coliniare $\Leftrightarrow \frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}^*$

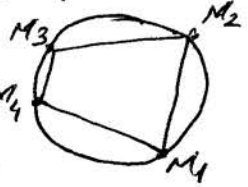
7) $M_1M_2 \parallel M_3M_4 \Leftrightarrow \frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*$

8) $M_1M_2 \perp M_2M_3 \Leftrightarrow \frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2} \in i\mathbb{R}^*$

9) $OM_1 \perp OM_2 \Leftrightarrow \frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}^*$

10) $M_1M_2 \perp M_3M_4 \Leftrightarrow \frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_1} \in i\mathbb{R}^*$

11) M_1, M_2, M_3, M_4 conciclice $\Leftrightarrow$ 4 trei necoliniare și $\frac{z_4 - z_1}{z_2 - z_1} \cdot \frac{z_1 - z_4}{z_3 - z_4} \in \mathbb{R}^*$



12) $A_1A_2A_3$ triunghi echilateral $\Leftrightarrow$
a) $|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_1 - z_3| \Leftrightarrow$
b) $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1$
c) $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_2} = \frac{z_2 - z_3}{z_1 - z_3} \Leftrightarrow$

13) Dacă $|z_1| = |z_2| = |z_3|$ at $\Delta A_1A_2A_3$ echil $\Leftrightarrow$
a) $z_1\bar{z}_2 = z_2\bar{z}_3 = z_3\bar{z}_1$
b) $z_1^2 = z_2z_3$ și $z_2^2 = z_3z_1$
c) $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

14) Cond. SUFICIENTE ca $\Delta A_1A_2A_3$ echilat
a) $z_1\bar{z}_2 = z_2\bar{z}_3 = z_3\bar{z}_1 \Rightarrow \Delta A_1A_2A_3$ echilat
b) $z_1^2 = z_2z_3$ și $z_2^2 = z_3z_1 \Rightarrow \Delta A_1A_2A_3$ echilat

15) Dacă z_1, z_2, z_3 afixele Δ echilat în ac ordine $\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 - \frac{2\pi}{3}$, $\alpha_3 = \alpha_2 + \frac{2\pi}{3}$

16) M_1, M_2, M_3 coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

17) ec M_1M_2: $\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

18) aria $\Delta M_1M_2M_3$ este $\frac{i}{4}|\Delta|$, $\Delta = \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix}$

19) aria poligon convex $M_1M_2 \ldots M_n$ este $\mathcal{A} = \frac{1}{2} \cdot Im(a_1\bar{a}_2 + a_2\bar{a}_3 + \ldots + a_n\bar{a}_1)$

20) $M \in M_1M_2 \Leftrightarrow \frac{z_2 - z}{z_1 - z} \in \mathbb{R}^*$
$M \in (M_1M_2) \Leftrightarrow \frac{z_2 - z}{z - z_1} \in \mathbb{R}^*_+$
$M \in (M_1M_2 \Leftrightarrow \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \in \mathbb{R}^*_+$

21) Dacă $\overrightarrow{M_1M} = k \cdot \overrightarrow{MM_2} \Rightarrow z = \frac{z_1 + kz_2}{1 + k}$
($k > 0 \Rightarrow M_1 - M - M_2$, dacă $k < 0 \Rightarrow M \in M_1M_2 - [M_1M_2]$

22) rădăcinile de ordin n ale unui nr. complex sunt vârfurile unui poligon regulat de centru O și rază $\sqrt[n]{r}$, unde se află $z^n = a$

Obs.: rădăcinile sunt pe cerc dar nu orice nr de pe cerc e rădăcină

PRODUSUL REAL ȘI COMPLEX A NR. COMPLEXE

(N3)

Produs real

1) $a \cdot b = \frac{1}{2}(\bar{a}b + a\bar{b}) \in \mathbb{R}$

Obs.: $a \cdot b = b \cdot a$

2) (UAȘE)

a) $AB \perp CD \Leftrightarrow$

b) $(d-c) \cdot (b-a) = 0$

c) $\frac{d-c}{b-a} \in i\mathbb{R}^*$

Produs complex

1) $a \times b = \frac{1}{2}(\bar{a}b - a\bar{b}) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

Obs.: $a \times a = 0$

$a \times b = -b \times a$

2) (UAȘE)

a) A, B, C coliniare $\Leftrightarrow$

b) $(c-a) \times (b-a) = 0$

c) $a \times b + b \times c + c \times a = 0$

Obs.: $AB \parallel CD \Leftrightarrow$ (A, B, C necoliniare și $(d-c) \times (b-a) = 0$)