DEDUCEREA RELAȚIILOR GEOMETRICE

DIN TEOREMA SINUSURILOR

Fie ΔABC cu laturi $BC=a$, $AB=c$, $AC=b$, arătați că:

1) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ (T. sin)

2) dacă a', b', c' sunt laturile Δ orctic (format de picioarele înălțimilor), se cere:

a) $a'=a\cos A$, $b'=b\cos B$, $c'=c\cos C$

b) $R'=\frac{R}{2}$ unde R' raza cerc. cercumscris Δ orctic

Se știe că $S_{ABC}=\frac{\text{baza}\cdot\text{înălț}}{2}$,

se cere:

4) $S_{ABC}=\frac{ab\sin C}{2}$; $S_{ABC}=\frac{bc\sin A}{2}$;

$S_{ABC}=\frac{ac\sin B}{2}$

5) $S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

6) $S_{ABC}=\frac{abc}{4R}$

7) $S_{ABC}=R\cdot p$

8) $S_{ABC}=r_a(p-a)$; $S_{ABC}=r_b(p-b)$, $S_{ABC}=r_c(p-c)$ unde r_a, r_b, r_c razele cercului exînscris ΔABC

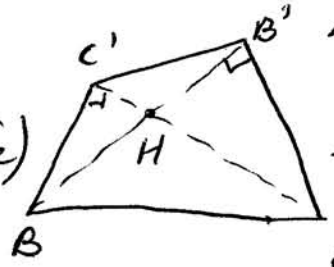
Prof. Ovidiu Bădescu

Dacă a', b', c' laturile Δ ortic și R' raza cercului circumscris Δ ortic (format de picioarele bisectoarelor), să se arate: a) $a' = a\cos A$, $b' = b\cos B$, $c' = c\cos C$ și

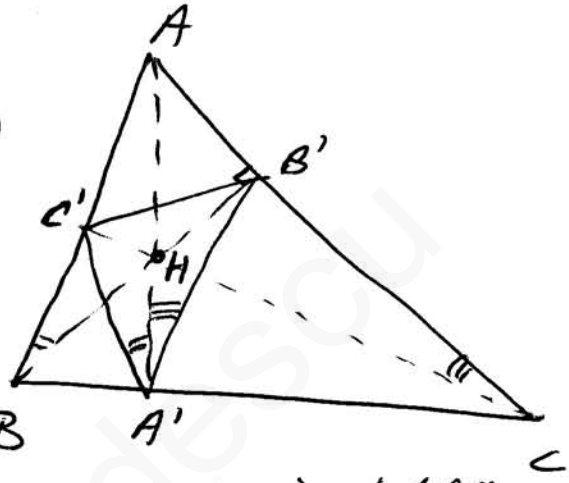
b) $R' = \frac{R}{2}$

---

a) E_1) în $\Delta AB'C' \xrightarrow{T\sin} \boxed{\frac{B'C'}{\sin A} = \frac{AB'}{\sin(AC'B')}}$ (1)



E_2) în $Bc'B'C$, $B\hat{C}'C \equiv B\hat{B}'C$ $\Rightarrow$ 4 format de o lat. cu o diag e $\equiv$ cu unghiul format de cealaltă diag cu latura opusă $\Rightarrow Bc'B'C$ inscriptibil



$\Rightarrow \underline{Bc'B'} + B\hat{C}B' = 180°$. Dar, $\underline{Bc'B'} + AC'\hat{B}' = 180° \Rightarrow B\hat{C}B' \equiv AC'\hat{B}'$

$\Rightarrow AC'\hat{B}' \equiv \hat{C} \Rightarrow \sin(AC'\hat{B}') = \sin C \xrightarrow{(1)} \frac{B'C'}{\sin A} = \frac{AB'}{\sin C}$

$\Rightarrow \boxed{B'C' = \frac{\sin A}{\sin C} \cdot AB'}$ (2). În ΔABC, din $T\sin \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$

$\Rightarrow \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c} \xrightarrow{(2)} \boxed{B'C' = \frac{a}{c} AB'}$ (3)

E_3) în $\Delta ABB' \Rightarrow \cos A = \frac{AB'}{AB} \Rightarrow AB' = c\cos A \xrightarrow{(3)}$

$B'C' = \frac{a}{c} c\cos A \Rightarrow \boxed{a' = a\cos A}$, analog $b' = b\cos B$, $c' = \dots$

---

b) E_1) în $\Delta A'B'C' \Rightarrow \boxed{\frac{a'}{\sin A'} = 2R'}$, știm $a' = a\cos A$ și găsim A'

E_2) $A' = C'\hat{A}'H + H\hat{A}'B'$. Dar, $BA'HC'$ are $B\hat{A}'H + B\hat{C}'H = 180°$

$\Rightarrow BA'HC'$ inscriptibil $\Rightarrow C'\hat{A}'H \equiv C'\hat{B}H \xrightarrow{\Delta ABB'} 90° - \hat{A}$

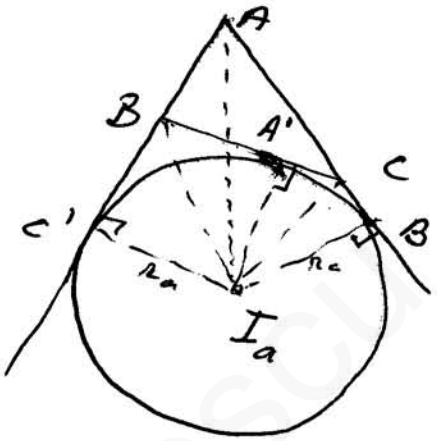
Analog, $CA'HB'$ inscriptibil $\Rightarrow B'\hat{A}'H \equiv B'\hat{C}H \xrightarrow{\Delta ACH} 90° - \hat{A}$

E_3) $A' = 90° - A + 90° - A = 180° - 2A \Rightarrow \sin A' = \sin(\pi - 2A) =$

$= \underbrace{\sin\pi}_{0}\cos 2A - \underbrace{\cos\pi}_{-1}\sin 2A \Rightarrow \boxed{\sin A' = \sin 2A}$

E_4) din E_1) $\Rightarrow 2R' = \frac{a'}{\sin A'} = \frac{a\cos A}{\sin 2A} = \frac{a\cos A}{2\sin A\cos A} = \frac{a}{2\sin A} = R$

Arătați că a) $S_{ABC} = r_a(p-a)$ b) $S_{ABC} = r_b(p-b)$ c) $S_{ABC} = r_c(p-c)$ unde r_a, r_b, r_c sunt razele cercului exînscris $\triangle ABC$



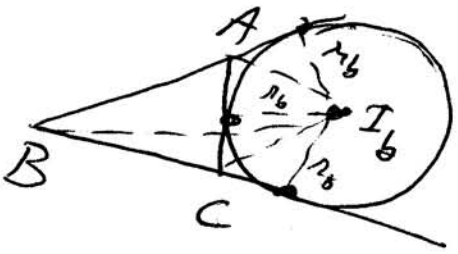
TEORIE: cerc exînscris înseamnă că e tangent la o latură și la prelungirile celorlalte două și va avea centrul la intersecția a 2 bisectoare exterioare cu cea interioară

a) $S_{ABC} = S_{ABI_a} + S_{ACI_a} - S_{BCI_a} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{c \cdot r_a}{2} + \frac{b r_a}{2} - \frac{a \cdot r_a}{2}$

$\Rightarrow S_{ABC} = r_a\left(\frac{b+c-a}{2}\right) = r_a \cdot \frac{a+b+c-2a}{2} = r_a \cdot \frac{2p-2a}{2} = r_a(p-a)$

b) $S_{ABC} = S_{BCI_b} + S_{BAI_b} - S_{ACI_b}$

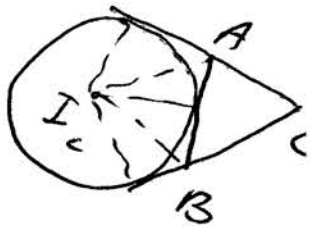
$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{a \cdot r_b}{2} + \frac{c \cdot r_b}{2} - \frac{b \cdot r_b}{2}$



$S_{ABC} = r_b \cdot \frac{a+c-b}{2} = r_b \cdot \frac{a+b+c-2b}{2} = r_b \cdot \frac{2p-2b}{2} = r_b(p-b)$

c) $S_{ABC} = S_{CAI_c} + S_{CBI_c} - S_{ABI_c} \Rightarrow$

$S_{ABC} = \frac{b \cdot r_c}{2} + \frac{a \cdot r_c}{2} - \frac{c \cdot r_c}{2} = r_c \frac{a+b-c}{2}$



$\Rightarrow S_{ABC} = r_c \cdot \frac{a+b+c-2c}{2} = r_c \cdot \frac{2p-2c}{2} = r_c(p-c)$

Prof. Ovidiu Badescu