PROBLEME ELEMENTARE DE GEOMETRIE

Rezolvări vectorial: VECTORIALĂ

1) Fie ABC un Δ echilateral și O centrul cerc. circumscris, se cere
$\vec{AB}+\vec{AC}-3\vec{AO}=?$

2) Fie A, B, C, Δ puncte oarecare din plan cu $\vec{AB}=\vec{C\Delta}$.
Se cere $\vec{AC}+\vec{\Delta B}=\vec{0}$

3) Fie G centru de greutate pt ΔABC, se cer $a, b=?$ dacă
$a\vec{GA}+b\vec{GB}=\vec{GC}$

4) Fie $AB\Delta$ un patrulater oarecare și E, F, G, H mijloacele laturilor $BC, \Delta A, AB$ și $C\Delta$.
Se cere $\vec{EF}+\vec{HG}=\vec{CA}$

5) ΔABC, AM, BN, CP mediane, se cere $\vec{AM}+\vec{BN}+\vec{CP}=?$

6) $AB\Delta$ patrulater și E, F mijloace diag AC respectiv $B\Delta$.
Se cere: $\vec{AB}+\vec{C\Delta}=2\vec{EF}$

7) $ABC\Delta EF$ hexagon regulat de centru O, se cere:
$\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{A\Delta}+\vec{AE}+\vec{AF}=6\vec{AO}$

8) $AB\Delta C$ și AB, $C\Delta$ coarde ale unui cerc de centru O și $AB\cap C\Delta=\{P\}$. Se cere:
$\vec{PA}+\vec{PB}+\vec{PC}+\vec{P\Delta}=2\vec{PO}$

9) $ABC\Delta$ patrulater convex și M, N mijloacele lui $A\Delta$, respectiv BC.
Se cere $\vec{AB}+\vec{\Delta C}=2\vec{MN}$

10) mijloacele laturilor unui patrulater convex formează un paralelogram

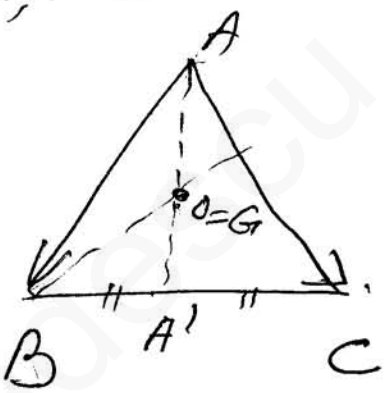
11) $AB\Delta C$ patrulater și E, F mijloace diag AC, respectiv $B\Delta$.
Se cere: $\vec{A\Delta}+\vec{CB}=2\vec{EF}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $\triangle ABC$ echilateral, O centrul cercului circumscris, se cere $\vec{AB}+\vec{AC}-3\vec{AO}$

E_1) $\triangle$ echilateral $\Leftrightarrow$ toate liniile importante coincid $\Rightarrow$ pct de intersecție coincid adică

$O=I=G=H$



E_2) $\vec{AB}+\vec{AC}=2\vec{AA'}$

pentru că $\vec{AA'}=\frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{AC})$

E_3) $\vec{AO}=\frac{2}{3}\vec{AA'}$

E_4) $\vec{AB}+\vec{AC}-3\vec{AO}=2\vec{AA'}-3\cdot\frac{2}{3}\vec{AA'}$

$=\vec{0}$

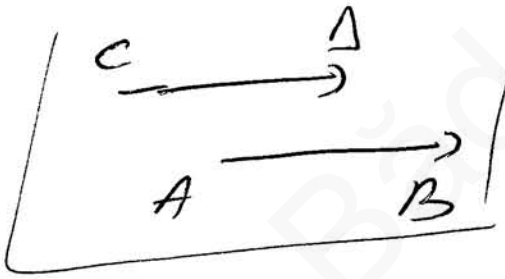
Prof. Ovidiu Bădescu

A, B, C, Δ a.î. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C\Delta}$

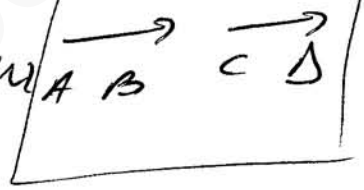
Se cere: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{\Delta B} = \vec{0}$

E_1) reprezint punctele mă știi dacă A, B, C, Δ coliniare sau nu $\rightarrow \exists$ mai multe variante de soluție, complicat

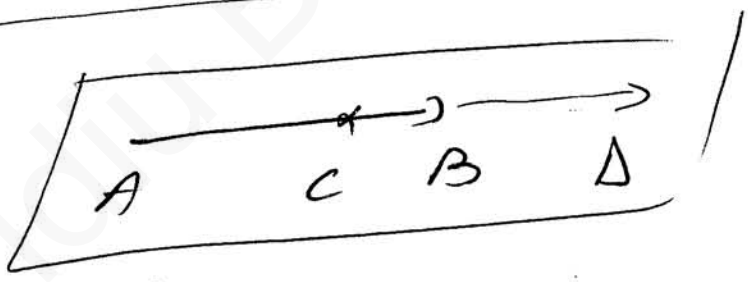
De exp



sau



sau



E_2) rezolv fără figură

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{C\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{C\Delta} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta C} = \vec{0}$

E_3) Vreau să obțin $\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{\Delta B}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{\Delta C} = \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta C} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{\Delta B} + \vec{0}$

$\rightarrow \quad -\overrightarrow{\Delta C} + \overrightarrow{\Delta B}$

Prof. Ovidiu Bădescu

G centru de greutate al ΔABC,

să se afle $a, b = ?$ astfel încât $a\vec{GA} + b\vec{GB} = \vec{GC}$

E_1) Se știe că G centru de greutate al ΔABC

$$\Rightarrow \vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{GC} = -\vec{GA} - \vec{GB}$$

E_2) Din ip. $\Rightarrow \vec{GC} = a\vec{GA} + b\vec{GB}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow a\vec{GA} + b\vec{GB} = -\vec{GA} - \vec{GB}$$

$$\Rightarrow (a+1)\vec{GA} + (b+1)\vec{GB} = \vec{0}$$

E_3) Dar, $(\vec{GA}, \vec{GB})$ necoliniari $\Bigg\} \Rightarrow$

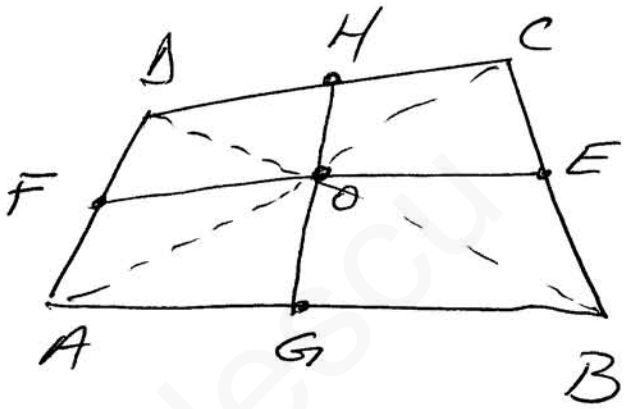
$$\Rightarrow a = -1$$

$$b = -1$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $ABCD$ patrulater oarecare și E, F, G și H mijloacele lui BC, DA, AB respectiv CD.

Arătați că: $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{CA}$



E_1) Fie $EF \cap HG = \{O\}$

E_2) $\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{HG} =$

$= (\overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OF})+(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OG})$

E_3) Dar, EO mediană în $\triangle BOC$

$\Rightarrow \overrightarrow{EO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{CO})$, analog și $\overrightarrow{OF}, \overrightarrow{HO}, \overrightarrow{OG}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA})$

$\overrightarrow{HO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{DO})$

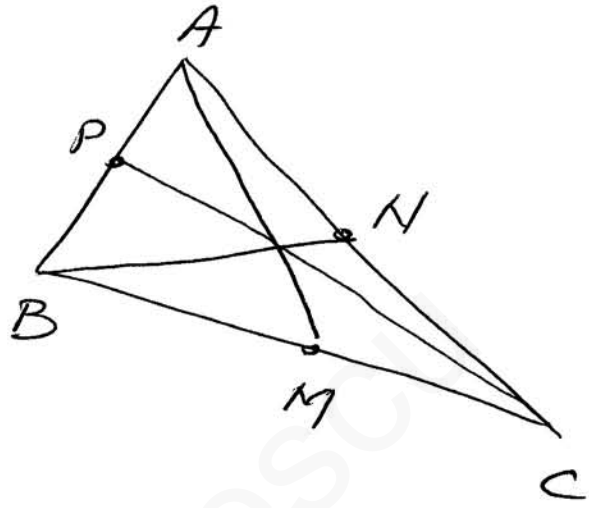
$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$

E_4) adunând $\Rightarrow \overrightarrow{EO}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{CO}+2\overrightarrow{OA}) =$

$= \overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA}$

Prof. Ovidiu Badescu

Dacă în ΔABC, AM, BN, CP mediane, calculați $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}$



$E_1)$ AM mediană $\Rightarrow$

$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$, analog

$\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$

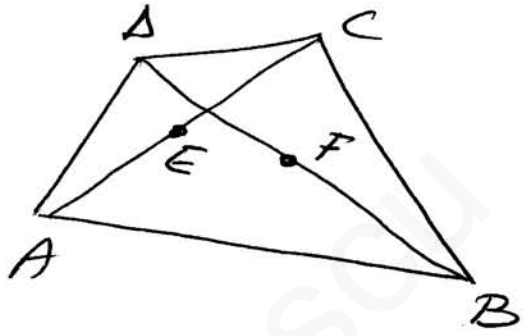
$\overrightarrow{CP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$

$E_2)$ adunând $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $ABCD$ un patrulater și E, F mijl diag AC respectiv BD.

Se cere: $\vec{AB}+\vec{CD}=2\vec{EF}$



$E_1)$ $\vec{AB}=\vec{AE}+\vec{EF}+\vec{FB}$

$\vec{CD}=\vec{CE}+\vec{EF}+\vec{FD}$

$E_2)$ adunăm $\Rightarrow \vec{AB}+\vec{CD}=(\vec{AE}+\vec{CE})+2\vec{EF}+(\vec{FB}+\vec{FD})$

$E_3)$ dar, $\vec{AE}+\vec{CE}=\vec{0}$ (vectori opuși) și

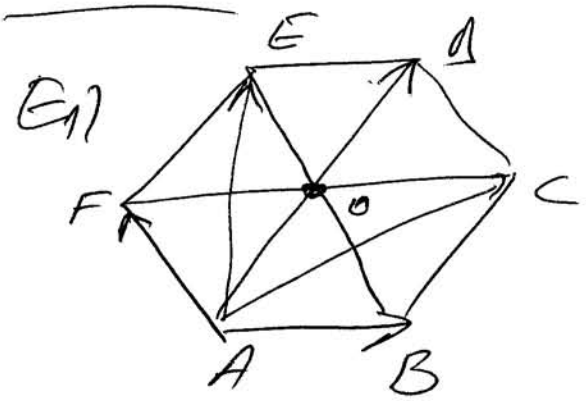
$\vec{FB}+\vec{FD}=\vec{0}$ (vectori opuși)

$\Rightarrow \vec{AB}+\vec{CD}=2\vec{EF}$

Prof. Ovidiu Băleșoiu

$ABCDEF$ hexag. regulat, centru O, să se

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=6\overrightarrow{AO}$$



E1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}$ (regula paral.)

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}$ (regula paral.)

E3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=$

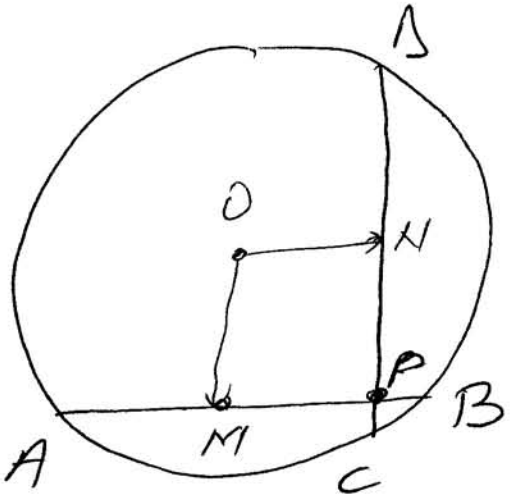
$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AD}=3\cdot 2\overrightarrow{AO}=6\overrightarrow{AO}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $AB \perp CD$, AB, CD coarde ale cercului de centru O și $AB \cap CD = \{P\}$

Se cere: $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$

E_1)



E_2) $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OD}$

E_3) „+": $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$

E_4) Fie M mijl $AB \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM}$

Fie N mijl $CD \Rightarrow \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON}$

E_5) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = 2\overrightarrow{OP}$

(M ca M mijl $\Rightarrow OM \perp AB$, N mijl $\Rightarrow$ $ON \perp CD \Rightarrow$ OMPN dreptunghi)

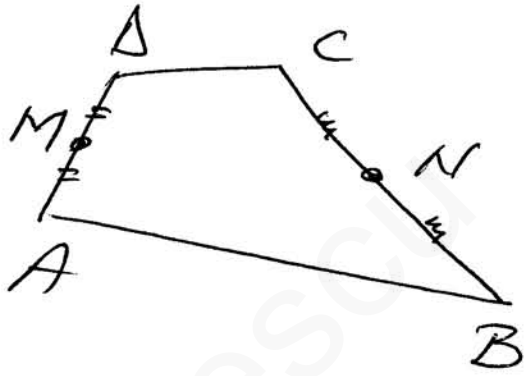
E_6) înlocuim în E_3)

$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 4\overrightarrow{PO} + 2\overrightarrow{OP} = 2\overrightarrow{PO}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $ABCD$ un patrulater convex și M, N mijl lui AD, respectiv BC.

Se cere: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{MN}$



E1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}$

$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NC}$

E2) adunăm $\Rightarrow$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DM})+2\overrightarrow{MN}+(\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC})$

E3) dar, $\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{DM}=\vec{0}$ (vectori opuși) și

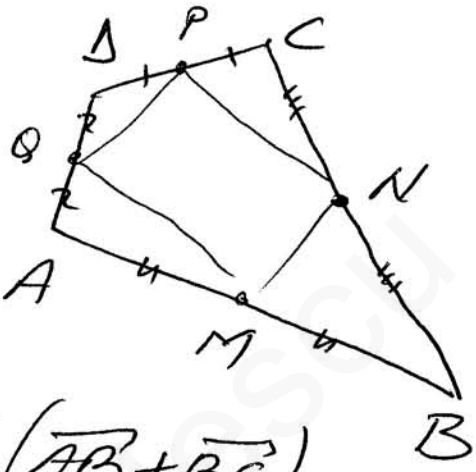
$\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}=\vec{0}$ (vectori opuși)

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{MN}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Arătați că mijloacele laturilor unui patrulater formează un paralelogram

---



E_1) Dacă vom arăta că $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, atunci MNPQ va fi paralelogram

E_2) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$ (1)

E_3) $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{QP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$ (2)

E_4) Din (1) și (2) $\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Rightarrow$ MNPQ este paralelogram

Prof. Ovidiu Bădescu