DEMONSTRAREA UNOR PROPRIETĂȚI VECTORIALE ELEMENTARE

IX 56

Arătați că:

1) AM mediană în $\triangle ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

2) BN mediană în $\triangle ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$

3) CP mediană în $\triangle ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$

4) G centru greutate în $\triangle ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

5) G centru greutate în $\triangle MNP \Leftrightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}$

6) G centru greutate în $\triangle QRS \Leftrightarrow \overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GR}+\overrightarrow{GS}=\vec{0}$

7) G centru greutate $\triangle ABC \Leftrightarrow$ ($\forall M$ exterior, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$)

8) $\triangle ABC$, $M \in (BC)$ cu $\frac{BM}{MC}=k \Rightarrow \overrightarrow{AM}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB}+\frac{k}{1+k}\overrightarrow{AC}$

9) $\forall M$ exterior avem (ABCD paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}$)

10) G centru greutate $\triangle PQR \Leftrightarrow$ ($\forall M$ exterior, $\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MR}=3\overrightarrow{MG}$)

11) $\triangle ABC$, $M \in (AC)$ cu $\frac{AM}{MC}=k \Rightarrow \overrightarrow{BM}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{BA}+\frac{k}{1+k}\overrightarrow{BC}$

12) $\forall M$ exterior avem (EFGH paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{ME}+\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{MH}$)

13) G centru greutate $SUV \Leftrightarrow$ ($\forall M$ exterior, $\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{MU}+\overrightarrow{MV}=3\overrightarrow{MG}$)

14) $\triangle ABC$, $M \in (AB)$ cu $\frac{AM}{MB}=k \Rightarrow \overrightarrow{CM}=\frac{1}{1+k}\overrightarrow{CA}+\frac{k}{1+k}\overrightarrow{CB}$

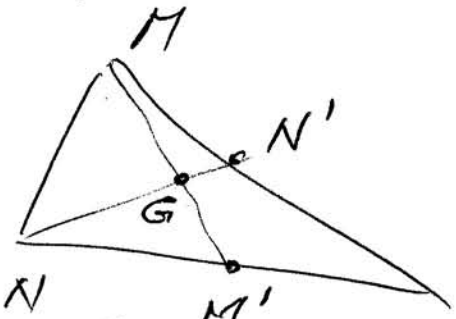
15) $\forall M$ exterior avem (SUVT paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{MS}+\overrightarrow{MV}=\overrightarrow{MU}+\overrightarrow{MT}$)

Prof. Ovidiu Bădescu

9.3.17

În ΔMNP avem:

(G centru greutate $\Leftrightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}$)



$\boxed{\Rightarrow}$

E1) G centru greutate $\overset{(?)}{\Rightarrow}$ $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}$

E1) G centru greutate $\Rightarrow GM=\frac{2}{3}MM'$

$\Rightarrow \overrightarrow{GM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{MM'}$

Dar, MM' mediană $\Rightarrow \overrightarrow{MM'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP})$

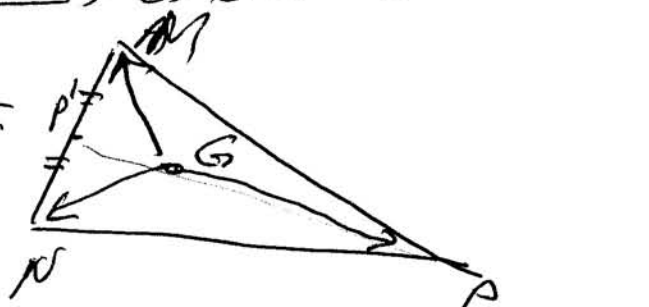
$\Rightarrow \overrightarrow{GM}=-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP})\right)=-\frac{1}{3}(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP})$

Analog, $\overrightarrow{GN}=-\frac{1}{3}(\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP})$

$\overrightarrow{GP}=-\frac{1}{3}(\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN})$

E2) Adun $\Rightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN})=\vec{0}$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\vec{0} \overset{(?)}{\Rightarrow}$ G centru greutate



E1) Fie $P'\in MN$ cu GP' mediană

$\Rightarrow \overrightarrow{GP'}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN})\Rightarrow$

$\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=2\overrightarrow{GP'}$

E2) din (1) $\Rightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}+\overrightarrow{GP}=\vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{GP'}+\overrightarrow{GP}=\vec{0}\Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{GP}=-2\overrightarrow{GP'} \Rightarrow \overrightarrow{GP}=2\overrightarrow{P'G}$ și G comun $\Rightarrow$

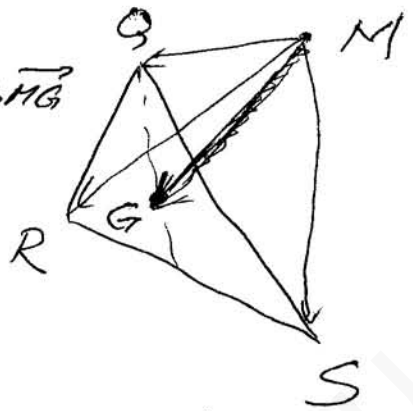
$\Rightarrow P, G, P'$ coliniare $\Rightarrow PP'$ mediană, $G\in PP'$ cu $GP=2GP'$

E3) Dar, P' mijl MN

$\Rightarrow G$ centru greutate

Arătați că în ΔQRS avem

$(G$ centrul de greutate$) \Leftrightarrow (\forall M$ din plan, $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{MS}=3\overrightarrow{MG})$



$\boxed{\Rightarrow}$ G centrul greut $\Rightarrow \overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{MS}=3\overrightarrow{MG}$

E_1) în $\Delta MQG \Rightarrow \overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QG}$

în $\Delta MRG \Rightarrow \overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{RG}$

în $\Delta MSG \Rightarrow \overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{SG}$

E_2) adunând avem $3\overrightarrow{MG}=(\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{MS})+(\overrightarrow{QG}+\overrightarrow{RG}+\overrightarrow{SG})$

E_3) dar, știm că G centru de greutate $\Rightarrow \overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GR}+\overrightarrow{GS}=\overrightarrow{0}$

$\Rightarrow \overrightarrow{QG}+\overrightarrow{RG}+\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{0}$ și înlocuind în E_3)

$\Rightarrow 3\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{MS}$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{MS}=3\overrightarrow{MG}$, se cere G centru greutate

E_1) în $\Delta MQG \Rightarrow \overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QG}$

în $\Delta MRG \Rightarrow \overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{RG}$

în $\Delta MSG \Rightarrow \overrightarrow{MG}=\overrightarrow{MS}+\overrightarrow{SG}$

E_2) adunând $\Rightarrow 3\overrightarrow{MG}=(\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{MS})+(\overrightarrow{QG}+\overrightarrow{RG}+\overrightarrow{SG})$

E_3) dar, din ipot $\Rightarrow \overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{MS}=3\overrightarrow{MG}$ și înlocuind în E_2) $\Rightarrow 3\overrightarrow{MG}=3\overrightarrow{MG}+(\overrightarrow{QG}+\overrightarrow{RG}+\overrightarrow{SG})$

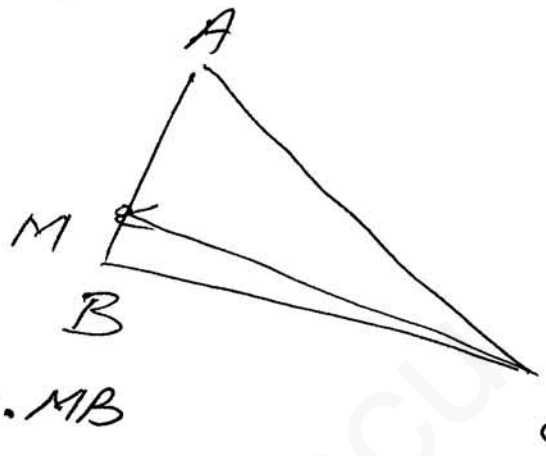
E_4) deci $\overrightarrow{QG}+\overrightarrow{RG}+\overrightarrow{SG}=\overrightarrow{0} \Rightarrow \overrightarrow{GQ}+\overrightarrow{GR}+\overrightarrow{GS}=\overrightarrow{0}$

<u>Teorie</u> $\Rightarrow$ G centru de greutate al ΔQRS

Prof. Ovidiu Badescu

Fie ΔABC, $M \in (AB)$ cu $\frac{AM}{MB} = k$, arătați că:

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{CA} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{CB}$$



E_1) în $\Delta ACM \Rightarrow$

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$$

E_2) din $\frac{AM}{MB} = k \Rightarrow AM = k \cdot MB$

Cum $\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{MB}$ sunt coliniari de același sens

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = k \cdot \overrightarrow{MB}$

E_3) înlocuind în $E_1) \Rightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + k \cdot \overrightarrow{MB}$

E_4) în $\Delta CMB \Rightarrow \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB}$, înlocuind

în $E_3) \Rightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + k \cdot (\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CB})$

$\Rightarrow \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + k \cdot \overrightarrow{MC} + k \cdot \overrightarrow{CB} \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{CM} - k \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + k \cdot \overrightarrow{CB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CM} + k \cdot \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + k \cdot \overrightarrow{CB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CM}(1+k) = \overrightarrow{CA} + k \cdot \overrightarrow{CB} \quad | : (1+k)$

$\Rightarrow CM = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{CA} + \frac{k}{1+k} \cdot \overrightarrow{CB}$

Prof. Ovidiu Bădescu