PROBLEME DE SINTEZĂ A GEOMETRIEI PLANE

1) Arătați că bisectoare internă a unghiului A și bisectoarele exterioare ale unghiurilor B și C sunt concurente.

2) a) ΔABC cu $m(\hat{A})=90^\circ$, $AB \perp BC$, E și F respectiv mijloace pt AB, AC.
Se cere $m(F\hat{B}E)=90^\circ$

b) ΔABC, AA', BB', CC' bisectoare, se cere: $m(A\hat{A}'B)+m(B\hat{B}'C)+m(C\hat{C}'A)=270^\circ$

c) ΔABC echilat, $D \in (AB)$, $E \in (AC)$ și $AD \equiv CE$ și $BE \cap CD = \{M\}$. Se cere $m(B\hat{M}C)=120^\circ$

3) a) $ABCD$ patr. convex, M, N, P, Q mijl pt AB, BC, CD, DA.
Se cere $MNPQ$ paralelogram

b) ΔABC echilat, $C \in (BD)$, $A \in (CE)$ și $DC \equiv AE \equiv AB$. Dacă $DE \cap AB = \{F\}$, se cere $AF = \frac{1}{3}AB$ $AD \perp BA$

c) $ABCD$ trapez, $AB \parallel CD$ și $AB = AD + CD$. Dacă E mijl BC, se cere $m(A\hat{E}D)=90^\circ$

4) a) $ABCD$ patr. cu $m(\hat{A})=m(\hat{C})=90^\circ$, $AD \cap BC = \{E\}$, $AB \cap DC = \{F\}$, se cere $BD \perp EF$

b) $ABCD$ paral., $CE \perp BC$, $AE \perp AB$, se cere $DE \perp AC$

c) ΔABC, $m(\hat{A})=90^\circ$, $AD \perp BC$, $F \in (AD)$. Perpend. în F pe FC intersectează AB în G. Paralela prin A la FG intersectează BC în H.
Se cere $AGFH$ paralelogr

5) a) ΔABC, $m(\hat{A})=90^\circ$, $AD \perp BC$, se cere $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

b) ΔABC, $m(\hat{A})=90^\circ$, $AB = AC+6$, $BC = 30$. Se cere lung bisect CD, $D \in (AB)$

6) $ABCD$ patr., paral prin B la AD intersectează AC în E, iar paral prin A la BC intersectează BD în F. Se cere $EF \parallel CD$

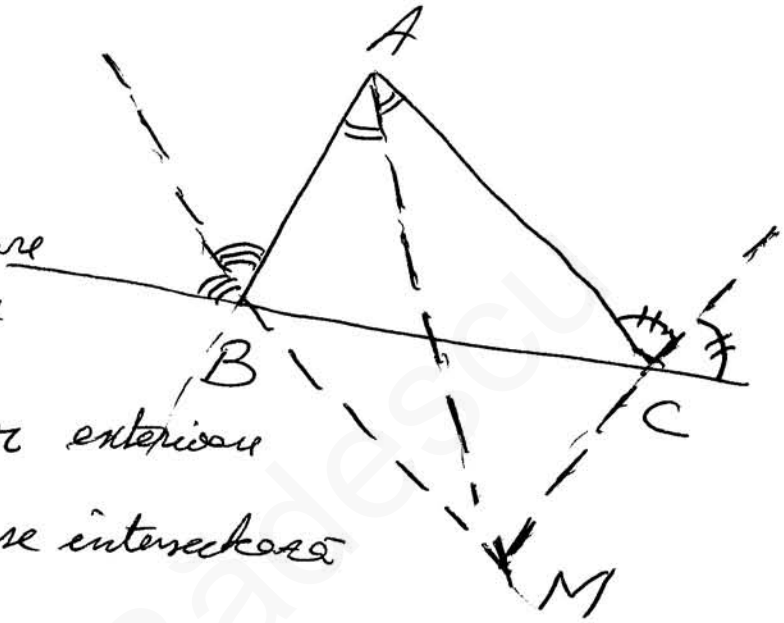
7) ΔABC, AD mediană, o paral. la AD taie AB în E și pe AC în F.
Se cere: $\frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC}$

8) ΔABC, $D, E \in (BC)$ cu $D\hat{A}B \equiv A\hat{C}B$ și $E\hat{A}C \equiv A\hat{B}C$. Se cere $AB^2 = BC \cdot BD$

9) ΔABC înscris în cerc, D și E mijl. arcelor $\overset{\frown}{AB}$ și $\overset{\frown}{AC}$ iar F, G intersecțiile lui DE cu AB și AC.
Se cere ΔAFG isoscel

10) Într-un cerc, $AB \perp CD$, AB și CD sunt coarde și $M \in (\overset{\frown}{BD})$.
Se cere: $m(A\hat{M}D)+m(B\hat{M}C)=90^\circ$

Arătați că bisectoarea interioară a unghiului A și bisectoarele exterioare ale lui B și C sunt concurente.



E_1) bisectoarele exterioare ale lui B și C sunt bisectoarele unghiurilor exterioare B și C, care evident se intersectează în M.

Rămâne să arătăm că $M \in$ bisectoarei interioare a punctului A.

E_2) $M \in$ bisect $\measuredangle$ a lui $B \Rightarrow dist(M, BC) = dist(M, AB)$

E_3) $M \in$ bisect $\measuredangle$ a lui $C \Rightarrow dist(M, BC) = dist(M, AC)$

E_4) $\Rightarrow dist(M, AB) = dist(M, AC) \Rightarrow$

$M \in$ bisect interioare a unghiului A

Prof. Ovidiu Badescu

a) $ABCD$ patr. convex, M, N, P, Q mijloace pt AB, BC, CD, DA. Se cere $MNPQ$ paralelogram

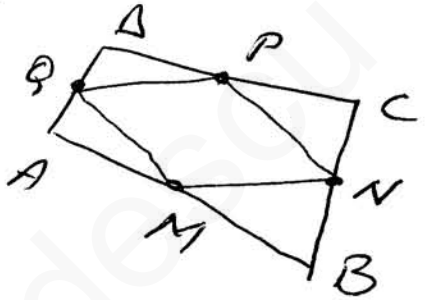
b) $\triangle ABC$ echilat, $C \in (BD)$, $A \in (CE)$ și $DC \equiv AE \equiv AB$. Dacă $DE \cap AB = \{F\}$, se cere $AF = \frac{1}{3} AB$

c) $ABCD$ trapez cu $AB \parallel CD$ și $AD = AB + CD$. Dacă E mijl lui BC, se cere $m(A\hat{E}D) = 90°$

---

a) Ducem AC diag, M și N mijl $AB, BC \Rightarrow MN$ l. mijl $\Rightarrow$

$\Rightarrow MN \parallel AC$ și $MN = \frac{AC}{2}$ (1)

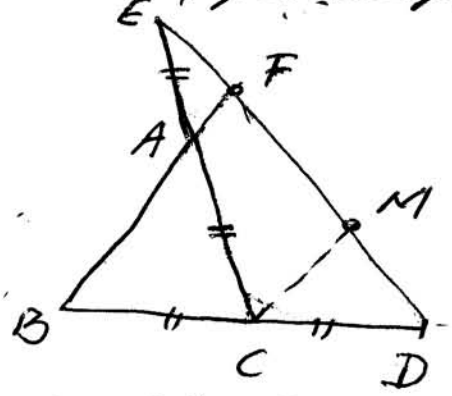


Analog, PQ l. mijl în $\triangle ABC \Rightarrow PQ \parallel AC$ și $PQ = \frac{AC}{2}$ (2)

Din (1) și (2) $\Rightarrow MN \parallel QP$ și $MN \equiv QP \Rightarrow MNPQ$ paralelogr.

b) Ducem $CM \parallel AF$, $M \in (DE)$ și cum A mijl lui $CE \Rightarrow AF$ l. mijl în $\triangle DBF$

$\Rightarrow \boxed{AF = \frac{CM}{2}}$ (1)



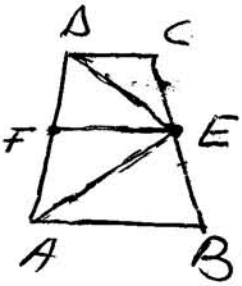
Dar, C mijl lui BD și $CM \parallel BF \Rightarrow$

$\Rightarrow CM$ l. mijl în $\triangle DBF \Rightarrow CM = \frac{BF}{2}$ (1) $\Rightarrow AF = \frac{CM}{2} = \frac{BF}{4}$

$\Rightarrow 4AF = BF \Rightarrow 4AF = BA + AF \Rightarrow 3AF = BA \Rightarrow AF = \frac{1}{3} AB$

c) Aparе $AB + CD$ și cum E mijloc, fie EF l mijl $\Rightarrow EF = \frac{AB + CD}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB + CD = 2EF \xrightarrow{\text{și}} AD = 2EF$



și cum F mijl lui $AD \Rightarrow EF$ mediană $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ mediana = jumătate din latura pe care pică

$\Rightarrow \triangle$ dreptunghic cu $m(\hat{E}) = 90° \Rightarrow m(A\hat{E}D) = 90°$

Prof. Ovidiu Bădescu