DEMONSTRAREA UNOR RELAȚII GEOMETRICE IMPORTANTE

În $\triangle ABC$, arătați vectorial că:

1) dacă $M \in AC, N \in AB, P \in BC$, atunci
M, N, P coliniare $\Leftrightarrow \frac{AM}{MC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BN}{NA} = 1$

2) dacă $N \in AC, M \in BC, P \in AB$ atunci
N, P, M coliniare $\Leftrightarrow \frac{AN}{NC} \cdot \frac{CM}{MB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1$

3) dacă $N \in AC, P \in AB, M \in BC$ atunci
N, M, P coliniare $\Leftrightarrow \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AP}{PB} = 1$

4) dacă $M \in (AB), N \in (AC), P \in (BC)$, atunci
AM, BN, CP concurente $\Leftrightarrow \frac{AN}{NC} \cdot \frac{CM}{MB} \cdot \frac{BP}{PA} = 1$

5) dacă $M \in (AB), N \in (AC), P \in (BC)$, atunci
AP, BN, CM concurente $\Leftrightarrow \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$

6) dacă $N \in (BC), M \in (AC), P \in (AB)$, atunci
AN, BM, CP concurente $\Leftrightarrow \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BN}{NC} \cdot \frac{CM}{MA} = 1$

7) dacă H ortocentrul și O centrul cercului circumscris $\triangle ABC$, atunci
$\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$ și
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$

8) dacă I centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, atunci
$\overrightarrow{MI} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{MA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{MB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{MC}$

Deduceți din cercul trigonometric

1) $\cos(a+b)$

2) $\cos(a-b)$

3) $\sin(a+b)$

4) $\sin(a-b)$