ECUAȚIE ATAȘATĂ. FORMAREA ECUAȚIEI ÎN y DACĂ ȘTIM EC. ÎN x ȘI RELAȚIE ÎNTRE RĂDĂCINI

Găsiți ecuația ale cărei rădăcini sunt:

1) $x_1 = 1,\ x_2 = 5$
2) $x_1 = \sqrt{3},\ x_2 = -\sqrt{3}$
3) $x_1 = 0,\ x_2 = 7$
4) $x_1 = -2,\ x_2 = -2$
5) $x_1 = \frac{1}{7},\ x_2 = -\frac{7}{3}$
6) $x_1 = 2-\sqrt{5},\ x_2 = 2+\sqrt{5}$
7) $x_1 = \sqrt{3},\ x_2 = -\sqrt{3}+\sqrt{5}$
8) $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}},\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$
9) $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}},\ x_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$
10) $x_1 = \frac{1}{3};\ x_2 = \frac{\sqrt{27}}{5}$

Fără a rezolva ecuația în x, găsiți ecuația în y ale cărei rădăcini x_1 și x_2 verifică relația dată în fiecare caz:

1) $x^2+5x+5=0,\ y_1 = x_1^2;\ y_2 = x_2^2$
2) $x^2+7x+7=0,\ y_1 = \frac{1}{x_1},\ y_2 = \frac{1}{x_2}$
3) $x^2+3x+1=0,\ y_1 = x_1+2x_2,\ y_2 = x_2+2x_1$
4) $x^2+x-4=0,\ y_1 = \frac{x_1}{1+x_1};\ y_2 = \frac{x_2}{1+x_2}$
5) $x^2+x-3=0,\ y_1 = \frac{x_1}{x_2},\ y_2 = \frac{x_2}{x_1}$
6) $x^2+5x=0,\ y_1 = x_1+\frac{1}{x_2},\ y_2 = x_2+\frac{1}{x_1}$
7) $x^2-x-3=0,\ y_1 = x_1^3,\ y_2 = x_2^3$
8) $x^2-x-5=0,\ y_1 = x_1+3x_2,\ y_2 = x_2+3x_1$
9) $x^2-x-7=0,\ y_1 = \frac{x_1}{2+x_1},\ y_2 = \frac{x_2}{2+x_2}$
10) $x^2+x-3=0,\ y_1 = \frac{x_1}{2x_2},\ y_2 = \frac{x_2}{2x_1}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x^2+5x-7=0$, să se scrie ec în y dacă

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2} \text{ și } y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$$

E1) ec în y de rad y_1 și y_2 este

$$y^2 - S_y \cdot y + P_y = 0$$

E2) $y_1 + y_2 = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) + \left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right) =$

$$= x_1 + x_2 + \frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{1} = x_1 + x_2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2} =$$

$$= P_x + \frac{S_x}{P_x}$$

Dar, $S_x = -\frac{b}{a} = -5$ și $P_x = \frac{c}{a} = -7$

$$\Rightarrow y_1 + y_2 = -5 + \frac{-5}{-7} = \frac{7}{-5} + \frac{5}{7} = \frac{-30}{7}$$

E3) $y_1 y_2 = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right) =$

$$= x_1 x_2 + 1 + 1 + \frac{1}{x_1 x_2} = P_x + 2 + \frac{1}{P_x} =$$

$$= -7 + 2 + \frac{1}{-7} = \frac{7}{-5} - \frac{1}{7} = -\frac{36}{7}$$

E4) ec în y: $y^2 - \left(-\frac{30}{7}\right) y + \left(-\frac{36}{7}\right) = 0 \quad | \cdot 7$

$$7y^2 + 30y - 36 = 0$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $x^2+5x+5=0$, a cărei ecuație în y au rădăcinile $y_1=x_1^2$ și $y_2=x_2^2$

E_1) știm $y_1, y_2 \Rightarrow$ ec. în y este

$$y^2 - S_y \cdot y + P_y = 0$$

E_2) $\begin{cases} S_y = y_1+y_2 = x_1^2+x_2^2 = S_x^2 - 2P_x \\ P_y = y_1 \cdot y_2 = x_1^2 x_2^2 = (x_1 x_2)^2 = (P_x)^2 \end{cases}$

E_3) Din VIETE, $\begin{cases} S_x = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{1} = -5 \\ P_x = \frac{c}{a} = \frac{5}{1} = 5 \end{cases}$

$\Rightarrow S_y = (-5)^2 - 2\cdot 5 = 15$ și $P_y = 5^2 = 25$

E_4) Din E_1) $\Rightarrow$ $\boxed{y^2 - 15y + 25 = 0}$

Prof. Ovidiu Badescu