LOCUL GEOMETRIC AL VÂRFURILOR UNEI FAMILII DE PARABOLE

IX 50

Găsiți locul geometric al vârfurilor și poziția din l.g. ce conține vârfurile cu ramurile în $\begin{cases} \text{sus} \\ \text{jos} \end{cases}$

1) $f_m(x)=(m-2)x^2+(2m-1)x+m-5,\ m\neq 2$

2) $f_m(x)=mx^2+2(m+1)x+m+2,\ m\neq 0$

3) $f_m(x)=(m+1)x^2-(m-1)x+m,\ m\neq -1$

4) $f_m(x)=(m-2)x^2+(m+1)x+m-3,\ m\neq 2$

5) $f_m(x)=(m-1)x^2+(m-3)x+3-m,\ m\neq 1$

6) $f_m(x)=(m-3)x^2+(m-2)x+2-m,\ m\neq 3$

7) $f_m(x)=(m-4)x^2+(m-3)x+3-m,\ m\neq 4$

8) $f_m(x)=(m+2)x^2+(m+1)x+m+1,\ m\neq -2$

9) $f_m(x)=(m+3)x^2+2(m+2)x+m+2,\ m\neq -3$

10) $f_m(x)=(m+4)x^2-(m-3)x+m-3,\ m\neq -4$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți locul geometric al vârfurilor familiilor de parabole pentru $f_m(x)=(m-2)x^2+(2m-1)x+m-5$, $m\neq 2$ și porțiunea din loc geometric ce conține vârfurile cu ramurile în sus, respectiv cu ramurile în jos

$E_1)$ $\begin{cases} x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{2m-1}{2(m-2)} \\ y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{(2m-1)^2-4(m-2)(m-5)}{4(m-2)}=-\frac{4m^2-4m+1-4(m^2-7m+10)}{4(m-2)} \end{cases}$

$\Rightarrow y_V=-\frac{4m^2-4m+1-4m^2+28m-40}{4(m-2)} \Rightarrow y_V=-\frac{24m-39}{4(m-2)}$

$E_2)$ $\begin{cases} x_V=-\frac{2m-1}{2(m-2)} \Rightarrow 2(m-2)x_V=-2m+1 \Rightarrow (2m-4)x_V=-2m+1 \\ y_V=-\frac{24m-39}{4(m-2)} \end{cases}$

$\Rightarrow 2mx_V-4x_V=-2m+1 \Rightarrow$

$2mx_V+2m=4x_V+1 \Rightarrow$

$m(2x_V+2)=4x_V+1$

$\Rightarrow m=\frac{4x_V+1}{2x_V+2}$

$E_3)$ înlocuind în $y_V=-\frac{24m-39}{4(m-2)} \Rightarrow y_V=-\frac{24\cdot\frac{4x_V+1}{2x_V+2}-39}{4\left(\frac{4x_V+1}{2x_V+2}-2\right)} \Rightarrow$

$\Rightarrow y_V=-\frac{\frac{24(4x_V+1)-39(2x_V+2)}{2x_V+2}}{4\cdot\frac{4x_V+1-4x_V-4}{2x_V+2}} \Rightarrow y_V=-\frac{96x_V+24-78x_V-78}{4\cdot(-3)}$

$\Rightarrow y_V=-\frac{18x_V-54}{-12}=\frac{3\cancel{18}(x_V-3)}{\cancel{12}_2} \Rightarrow 2y_V=3x_V-9 \Rightarrow$ l.g. $\boxed{3x-2y-9=0}$

$E_4)$ parabolele au ramurile în sus $\Leftrightarrow a>0 \Leftrightarrow m-2>0$ și trebuie găsită condiție și x și y. Dar, $m=\frac{4x_V+1}{2x_V+2}$ și $m-2>0 \Rightarrow$

$\frac{4x_V+1}{2x_V+2}-2>0 \Rightarrow \frac{4x_V+1-4x_V-4}{2x_V+2}>0 \Rightarrow \frac{-3}{2x_V+2}>0 \Rightarrow 2x_V+2<0$

$\Rightarrow \boxed{x_V<-1}$, deci porțiunea cerută este

$A=\{(x,y)\,|\,3x-2y-9=0$ și $x<-1\}$.

$E_5)$ parabole cu ramuri în jos $\Leftrightarrow a<0 \Leftrightarrow m-2<0 \Leftrightarrow \frac{4x_V+1}{2x_V+2}-2<0$

$\Leftrightarrow \frac{4x_V+1-4x_V-4}{2x_V+2}<0 \Leftrightarrow 2x_V+2>0 \Leftrightarrow x_V>-1 \Rightarrow$ porțiunea este

$B=\{(x,y)\,|\,3x-2y-9=0$ și $x>-1\}$

Prof. Viorel Bălescu

Fie $f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m + 2$, $m \neq 0$

Se cere l.g. al vârfurilor și poziția lor din plan geometric cu a) ramurile în sus

b) ramurile în jos

E_1) $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2(m+1)}{2m} \Rightarrow \boxed{x_V = -\frac{m+1}{m}}$

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4(m+1)^2 - 4m(m+2)}{4m} = -\frac{4m^2+8m+4-4m^2-8m}{4m}$

$\Rightarrow y_V = -\frac{4}{4m} \Rightarrow \boxed{y_V = -\frac{1}{m}}$

E_2) din $y_V = -\frac{1}{m} \Rightarrow m = -\frac{1}{y_V}$ înlocuim în $x_V = -\frac{m+1}{m}$

$\Rightarrow x_V = -\frac{-\frac{1}{y_V}+1}{-\frac{1}{y_V}} = -\frac{\frac{-1+y_V}{y_V}}{-\frac{1}{y_V}} \Rightarrow x_V = -\frac{-1+y_V}{y_V} \cdot \frac{y_V}{-1}$

$x_V = -1 + y_V \Rightarrow x_V - y_V + 1 = 0 \Rightarrow$

l.g. este dreapta de ecuație $\boxed{x - y + 1 = 0}$

E_3) a) are ramurile în sus $\Leftrightarrow a > 0 \Rightarrow m > 0$,

vrem să găsesc condiție și x

$x_V = -\frac{m+1}{m} \Rightarrow mx_V = -m - 1 \Rightarrow m(1 + x_V) = -1$

$\Rightarrow m = -\frac{1}{1+x_V}$ și condiția $m > 0 \Rightarrow -\frac{1}{1+x_V} > 0 \mid \cdot(-1)$

$\frac{1}{1+x} < 0$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
1.		+ + +		+ +	
$1+x$		− − −	0	+ + +	
$\frac{1}{1+x}$		− − −	‖	+ + +	

$\Rightarrow x \in (-\infty; -1)$

$\Rightarrow$ ramurile în sus: $A = \{(x,y) \mid x - y + 1 = 0$ și $x < -1\}$

b) ramurile în jos: $B = \{(x,y) \mid x - y + 1 = 0$ și $x > -1\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți locul geometric al vârfurilor familiilor de parabole pt $f_m(x)=(m+4)x^2-(m-3)x+m-3$, $m\neq -4$ și porțiunea din l.g ce conține vârfurile cu ramurile în sus, respectiv în jos

$E_1)$ $\begin{cases} x_V=-\frac{b}{2a}=\frac{m-3}{2(m+4)} \Rightarrow \boxed{x_V=\frac{m-3}{2(m+4)}} \\ y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{m^2-6m+9-4(m+4)(m-3)}{4(m+4)}=-\frac{m^2-6m+9-4m^2-4m+48}{4(m+4)} \end{cases}$

$\Rightarrow y_V=-\frac{-3m^2-10m+57}{4(m+4)}=\frac{3m^2+10m-57}{4(m+4)} \Rightarrow \boxed{y_V=\frac{3m^2+10m-57}{4(m+4)}}$

$E_2)$ din $x_V=\frac{m-3}{2(m+4)} \Rightarrow 2mx_V+8x_V=m-3 \Rightarrow m(2x_V-1)=-3-8x_V$

$\Rightarrow \boxed{m=\frac{8x_V+3}{1-2x_V}}$

$E_3)$ înloc în $y_V \Rightarrow y_V=\frac{3\cdot\left(\frac{8x_V+3}{1-2x_V}\right)^2+10\cdot\frac{8x_V+3}{1-2x_V}-57}{4\left(\frac{8x_V+3}{1-2x_V}+4\right)}=$

$$=\frac{\frac{3(64x_V^2+48x_V+9)+10(8x_V+3)(1-2x_V)-57(1-2x_V)^2}{(1-2x_V)^2}}{4\cdot\frac{8x_V+3+4(1-2x_V)}{1-2x_V}}=$$

$$=\frac{192x_V^2+144x_V+27+10(8x_V-16x_V^2+3-6x_V)-57(1-4x_V+4x_V^2)}{(1-2x_V)^2}\cdot\frac{1-2x_V}{4(8x_V+3+4-8x_V)}$$

$$=\frac{192x_V^2+144x_V+27-160x_V^2+20x_V+30-57+228x_V-228x_V^2}{(1-2x_V)\cdot 28}=$$

$$=\frac{-196x_V^2+392x_V}{28(1-2x_V)}=\frac{28(-7x_V^2+14x_V)}{28(1-2x_V)}=\frac{-7x_V(x_V-2)}{1-2x_V}$$

$E_4)$ ramurile în sus $\Rightarrow a>0 \Rightarrow m+4>0 \Rightarrow \frac{8x_V+3}{1-2x_V}+4>0$

$\Rightarrow \frac{8x_V+3+4-8x_V}{1-2x_V}>0 \Rightarrow \frac{7}{1-2x_V}>0 \Rightarrow 1-2x_V>0 \Rightarrow x_V<\frac{1}{2}$ iar cu ramurile în jos $\Rightarrow x_V>\frac{1}{2}$

$E_5)$ ram în sus $\Rightarrow \boxed{A=\{(x,y)\mid y=\frac{-7x^2+14x}{1-2x},\ x<\frac{1}{2}\}}$ analog în jos