MULȚIMEA VALORILOR (IMAGINEA) UNEI FUNCȚII DE GRADUL I SAU GRAD II

Găsiți mulțimea valorilor sau imaginea unui interval (în funcție de ceea ce ne interesează), studiați mărginirea și găsiți $\min f$, $\max f$ în fiecare din situațiile următoare:

1) $f(x)=2x+6$, $f([1;5])=?$

2) $f(x)=-6x+12$, $f((-1;2])=?$

3) $f(x)=2x^2+6x-5$, $f([-1;4))=?$

4) $f(x)=2x^2+6x-5$, $f([-2;5))=?$

5) $f(x)=-3x+9$, $f((-\infty;2])=?$

6) $f(x)=-3x^2+6x+1$, $f([1;\infty))=?$

7) $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$, $\mathrm{Im} f=?$

8) $f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^2+2}$, $\mathrm{Im} f=?$

9) $f(x)=\frac{3x+2}{x^2+x+3}$, $f(\mathbb{R})=?$

10) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$, $\mathrm{Im} f=?$

11) $f(x)=\frac{x}{x^2+x+1}$, $\mathrm{Im} f=?$

12) $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x^2+x+1}$, $\mathrm{Im} f=?$

13) $f(x)=\frac{3x-1}{x^2+1}$, $\mathrm{Im} f=?$

14)

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți a) mulțimea valorilor

b) mărginirea

c) $\min f$, $\max f$

pentru $f(x) = -6x + 12$, $f((-1; 2]) = ?$

$E_1)$ $f(x) = -6x + 12$, $a = -6 < 0 \Rightarrow f \searrow$

$E_2)$

x	$(-1$	$2]$
$f(x)$	$(18$	$\searrow 0]$

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (-6x + 12) = 18$$

$$f(2) = -6 \cdot 2 + 12 = 0$$

$E_3)$ din tabel $\Rightarrow f((-1, 2]) = [0; 18)$

$\Rightarrow f$ mărginită și $\min f = 0$

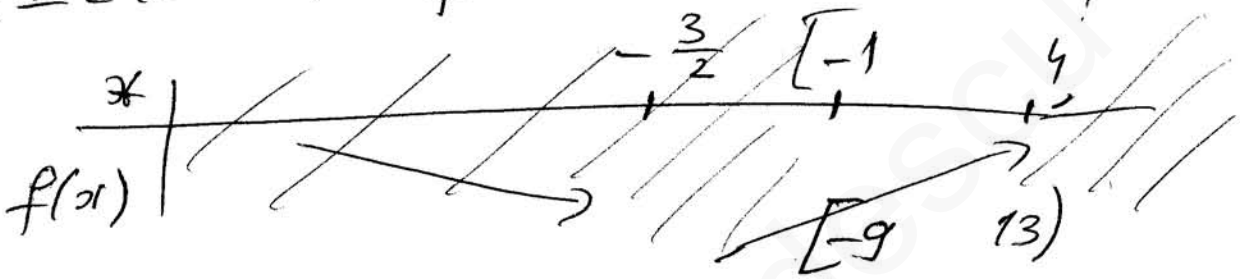
$\max f \nexists$

Prof. Ciucu Badescu

Găsiți a) mulțimea valorilor
b) studiați mărginirea
c) $\min f$ și $\max f$
pentru $f(x) = 2x^2 + 6x - 5$, $f([-1; 4))$.

E_1) $a = 2 > 0 \Rightarrow$ Gr f $\cup$ și $x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$

E_2)



$f(-1) = 2 \cdot 1 + 6 \cdot (-1) - 5 = -9$

$\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} f(x) = 2 \cdot 16 + 6 \cdot 4 - 5 = 32 - 24 + 5 = 13$

E_3) din tabel $\Rightarrow f([-1; 4)) = [-9; 13)$

$\Rightarrow f$ mărginită, $\min f = -9$, $\max f \nexists$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți mulțimea valorilor (imag interval), mărginirea, min f și max f

a) $f(x) = -3x + 9$, $f((-\infty; 2)) = ?$

E_1) $f(x) = -3x + 9$, $a = -3 < 0 \Rightarrow f \searrow$

E_2)

x	$-\infty$	$\searrow$	2)	///
$f(x)$	∞	$\searrow$	3)	///

$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to \infty$

$f(2) = -6 + 9 = 3$

$\Rightarrow f((-\infty; 2)) = (3; \infty)$

E_3) f nemărginită

E_4) min f nu există

max f nu există

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți mulțimea valorilor (imag unui interv), mărginirea, $\min f$ și $\max f$

$f(x) = -3x^2+6x+1$, $f([1;\infty)) = ?$

$E_1)$ $f(x) = -3x^2+6x+1$

$a = -3 < 0 \Rightarrow G_f \cap \Rightarrow f_{\searrow}(-\infty; -\frac{b}{2a}]$

$f_{\nearrow}[-\frac{b}{2a}; \infty)$

$E_2)$ $-\frac{b}{2a} = -\frac{6}{-6} = 1 \Rightarrow f_{\searrow}(-\infty; 1]$

$f_{\nearrow}[1; \infty)$

$E_3)$

x	1	∞
$f(x)$	4	$-\infty$

$f(1) = -3+6+1 = 4$

$x \to \infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$ (din grafic)

$\Rightarrow f([1;\infty)) = (-\infty; 4]$

$E_4)$ f nemărginită

$\nexists \min f$

$\max f = 4$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți mulțimea valorilor și studiați mărginirea pt $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

E_1) not $f(x)=y \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-x+1=x^2y+xy+y \Leftrightarrow$

$x^2(1-y)-x(1+y)+1-y=0$

E_2) $x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta_x \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-(1+y))^2-4(1-y)(1-y)\geq 0$

$1+2y+y^2-4(1-2y+y^2)\geq 0$

$\Leftrightarrow 1+2y+y^2-4+8y-4y^2\geq 0$

$-3y^2+10y-3\geq 0 \mid \cdot(-1)$

E_3) $3y^2-10y+3\leq 0$

$y_{1,2}=\dfrac{10\pm\sqrt{100-36}}{2\cdot 3}=\dfrac{10\pm 8}{6}\begin{matrix}3\\ \frac{1}{3}\end{matrix}$

E_4) $3y^2\ldots$

	$\frac{1}{3}$		3	
+	0	−	0	+

Pt că $3y^2-10y+3\leq 0 \Leftrightarrow y\in\left[\frac{1}{3},3\right]$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Im} f=\left[\frac{1}{3},3\right]} \Rightarrow \boxed{f \text{ mărginită}}$

$\Rightarrow \boxed{\min f=\frac{1}{3} \text{ și } \max f=3}$

Prof. Ovidiu Badescu

Găsiți mulțimea valorilor, studiați mărginirea și găsiți $\min f$, $\max f$:

$$f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x^2+2}$$

E_1) $f(x)=y \Rightarrow \frac{x^2+2x+3}{x^2+2}=y \Leftrightarrow x^2+2x+3=x^2y+2y$

$$x^2(1-y)+2x+3-2y=0$$

E_2) $x\in\mathbb{R} \Rightarrow \Delta_x \geq 0 \Rightarrow 4-4(1-y)(3-2y)\geq 0 \mid :4$

$$\Leftrightarrow 1-(1-y)(3-2y)\geq 0 \Leftrightarrow 1-(3-2y-3y+2y^2)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1-3+5y-2y^2\geq 0 \mid \cdot(-1)$$

$$2y^2-5y+2\leq 0$$

E_3) $y_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm 3}{4}\swarrow \frac{1}{2}^{2}$

E_4)

y		$\frac{1}{2}$		2
$2y^2-5y+2$	$+\,+$	0	$---$	0 $+\,+$

Rț $2y^2-5y+2\leq 0 \Leftrightarrow y\in\left[\frac{1}{2},2\right]$

E_5) $\operatorname{Im} f=\left[\frac{1}{2},2\right] \Rightarrow f$ mărginită

$\min f=\frac{1}{2}$ $\quad$ $\max f=2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\dfrac{3x+2}{x^2+x+3}$, se cere $\begin{cases} \text{Im } f \\ \min f=? \\ \max f=? \end{cases}$

$E_1)$ not $f(x)=y \Rightarrow \dfrac{3x+2}{x^2+x+3}=y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+2=x^2y+xy+3y \Rightarrow$

$x^2y+x(y-3)+3y-2=0$

$E_2)$ $x\in\mathbb{R} \Rightarrow \Delta_x \geq 0 \Rightarrow (y-3)^2-4y(3y-2)\geq 0$

$\Rightarrow y^2-6y+9-12y^2+8y\geq 0$

$-11y^2+2y+9\geq 0 \mid \cdot(-1)$

$11y^2-2y-9\leq 0$

$E_3)$ $y_{1,2}=\dfrac{2\pm\sqrt{4+396}}{2\cdot 11}=\dfrac{2\pm\sqrt{400}}{22}$ $\begin{cases} \frac{22}{22}=1 \\ -\frac{18}{22}=-\frac{9}{11} \end{cases}$

$E_4)$

y		$-9/11$		1	
$11y^2-2y-9$	$+$	0	$-$	0	$+$

Rf ca $11y^2-2y-9\leq 0 \Leftrightarrow y\in\left[-\frac{9}{11};1\right]$

$E_5)$ $f(x)\in\left[-\frac{9}{11};1\right]$ $\forall x$ $\begin{cases} \min f=-\frac{9}{11} \\ \max f=1 \end{cases}$

$\Rightarrow \text{Im } f=\left[-\frac{9}{11};1\right]$, f mărg

Prof. Cristina Băescu