SISTEME SIMETRICE, OMOGENE, OARECARE

Rezolvați în numere întregi următoarele sisteme:

1) $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ x^2+3xy+2y^2=6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x^2-xy+2y^2=4 \\ x^2+3xy+y^2=5 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x^2+xy-2y^2=4 \end{cases}$

5) $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{5}{2} \\ 2x-xy+2y=4 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^3+2xy+y^3=13 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x^2-xy+2y^2=4 \\ x^2+3xy-y^2=3 \end{cases}$

8) $\begin{cases} x(x+y+z)=20 \\ y(x+y+z)=30 \\ z(x+y+z)=50 \end{cases}$

9) $\begin{cases} x\sqrt{yz}=4 \\ y\sqrt{xz}=9 \\ z\sqrt{xy}=16 \end{cases}$

10) $\begin{cases} x^2+xy+y=10 \\ x+xy+y^2=10 \end{cases}$

Ovidiu Bădescu

Rezolvați $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ x^2-xy+y^2=7 \end{cases}$

E_1) sistem simetric, folosim $x^3+y^3=S^3-3PS$

$x^2+y^2=S^2-2P$

E_2) $\begin{cases} S^3-3PS=7 \\ (S^2-2P)-P=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3-3PS=7 \\ S^2-3P=7 \end{cases}$

E_3) Din $S^2-3P=7 \Rightarrow 3P=S^2-7 \Rightarrow P=\frac{S^2-7}{3}$

înloc în: $S^3-3PS=7 \Rightarrow S^3-3\cdot\frac{S^2-7}{3}\cdot S=7$

$\Rightarrow S^3-S^3+7S-7=0 \Rightarrow \boxed{S=1}$

E_4) $P=\frac{S^2-7}{3}=\frac{1-7}{3}=-2 \Rightarrow \boxed{P=-2}$

E_5) Folosim ec. atașată

$t^2-St+P=0 \Rightarrow t^2-t-2=0$

$t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm3}{2}\begin{matrix}\nearrow 2 \\ \searrow -1\end{matrix}$

E_6) Sol sistemului: $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

Prof. Ovidiu Badescu

Rezolvați $\begin{cases} 3x^2 - xy + 2y^2 = 4 \\ x^2 + 3xy + y^2 = 5 \end{cases}$

E_1) sistem omogen de grad II, notăm $y = tx$

E_2) $\begin{cases} 3x^2 - tx^2 + 2t^2x^2 = 4 \\ x^2 + 3tx^2 + t^2x^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2(3 - t + 2t^2) = 4 \\ x^2(1 + 3t + t^2) = 5 \end{cases}$

E_3) împart $\Rightarrow \dfrac{x^2(3 - t + 2t^2)}{x^2(1 + 3t + t^2)} = \dfrac{4}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5(3 - t + 2t^2) = 4(1 + 3t + t^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 15 - 5t + 10t^2 = 4 + 12t + 4t^2$

$\Rightarrow 6t^2 - 17t + 11 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \dfrac{17 \pm \sqrt{289 - 264}}{2 \cdot 6}$

$t_{1,2} = \dfrac{17 \pm 5}{12} \begin{cases} \frac{22}{12} = \frac{11}{6} \\ \frac{12}{12} = 1 \end{cases}$

E_4) Caz I: $t_1 = \dfrac{11}{6}$ înlocuim $x^2(3 - t + 2t^2) = 4$

$\Rightarrow x^2\left(3 - \frac{11}{6} + \frac{121}{18}\right) = 4 \Rightarrow x^2 \cdot \dfrac{54 - 33 + 121}{18} = 4$

$\Rightarrow x^2 \cdot \dfrac{142}{18} = 4 \Rightarrow x^2 \cdot \dfrac{71}{9} = 4 \Rightarrow x^2 = \dfrac{36}{71} \Rightarrow x = \pm\dfrac{6}{\sqrt{71}}$

$x_1 = \dfrac{6}{\sqrt{71}}$, $y_1 = tx_1 = \dfrac{11}{6} \cdot \dfrac{6}{\sqrt{71}} = \dfrac{11}{\sqrt{71}}$; $x_2 = -\dfrac{6}{\sqrt{71}} \Rightarrow y_2 = -\dfrac{11}{\sqrt{71}}$

Caz II: $t_2 = 1$ înlocuim $x^2(3 - t + 2t^2) = 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 \cdot (3 - 1 + 2) = 4 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$x_3 = 1 \Rightarrow y_3 = tx_3 = 1$; $x_4 = -1 \Rightarrow y_4 = tx_4 = -1$

Rezolvați $\begin{cases} \frac{y}{x}+\frac{x}{y}=\frac{5}{2} \mid \cdot(2xy) \\ 2x-xy+2y=4 \end{cases}$

$E_1)\begin{cases} 2y^2+2x^2=5xy \\ 2(x+y)-xy=4 \end{cases}$

$E_2)$ Obs. că e sistem simetric, folosim $\begin{cases} x^2+y^2=S^2-2P \\ x+y=S \\ xy=P \end{cases}$

$E_3)\begin{cases} 2(S^2-2P)=5P \\ 2S-P=4 \Rightarrow P=2S-4 \end{cases}$

înlocuim în $E_1) \Rightarrow 2(S^2-2(2S-4))=5(2S-4)$

$2S^2-4(2S-4)=10S-20$

$2S^2-8S+16=10S-20$

$2S^2-18S+36=0 \mid :2$

$S^2-9S+18=0$

$S_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81-72}}{2}=\frac{9\pm 3}{2}<\begin{matrix}\frac{12}{2}=6\\ \frac{6}{2}=3\end{matrix}$

$E_4)$ $S_1=6$ și $P=2S-4 \Rightarrow P=8 \Rightarrow t^2-St+P=0$

$\Rightarrow t^2-6t+8=0 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}<\begin{matrix}4\\2\end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

$E_5)$ $S_2=3$ și $P=2S-4 \Rightarrow P=2 \Rightarrow t^2-St+P=0$

$\Rightarrow t^2-3t+2=0 \Rightarrow <\begin{matrix} t_1=2 \\ t_2=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați sistemul: $\begin{cases} x^3+2xy+y^3=13^6 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

E1) sistem simetric, folosim: $x^3+y^3=S^3-3PS$

$x^2+y^2=S^2-2P$

E2) $\begin{cases} S^3-3PS+2P=13 \\ S^2-2P=5 \Rightarrow P=\frac{S^2-5}{2} \text{ înlocuim ec(1)} \end{cases}$

E3) $S^3-3\cdot\frac{S^2-5}{2}\cdot S+2\cdot\frac{S^2-5}{2}=13 \mid \cdot 2$

$2S^3-3S(S^2-5)+2(S^2-5)=26$

$2S^3-3S^3+15S+2S^2-10-26=0$

$-S^3+2S^2+15S-36=0 \mid \cdot(-1)$

$S^3-2S^2-15S+36=0$

E4) Horner

	S^3	S^2	S	S^0
	1	−2	−15	36
1	1	−1	−16	20 ≠ 0
3	1	1	−12	0

$\Rightarrow (S-3)(S^2+S-12)=0 \Rightarrow$ $S-3=0 \Rightarrow S_1=3$ sau $S^2+S-12=0$

$\Rightarrow S_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}$ $\begin{matrix} 3=S_2 \\ -4=S_3 \end{matrix}$

Cob T:

E5) $S_1=3 \Rightarrow P_1=\frac{S^2-5}{2}=2 \Rightarrow$ ec. atașată $t^2-St+P=0$

$t^2-3t+2=0 \Rightarrow t_1=1, t_2=2 \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix}$ sau $\begin{matrix} x=2 \\ y=1 \end{matrix}$

$\Delta=1-8=-\frac{11}{2}\Rightarrow\ldots$

Rezolvați: $\begin{cases} x(x+y+z)=20 \\ y(x+y+z)=30 \\ z(x+y+z)=50 \end{cases}$

E_1) adun ec $\Rightarrow (x+y+z)(x+y+z)=20+30+50$

$\Rightarrow (x+y+z)^2=100$

$\Rightarrow x+y+z=\pm 10$

E_2) Caz I: $x+y+z=10$ înlocuiesc în sistem

$\Rightarrow \begin{cases} x\cdot 10=20 \Rightarrow x=2 \\ y\cdot 10=30 \Rightarrow y=3 \\ z\cdot 10=50 \Rightarrow z=5 \end{cases}$

Caz II: $x+y+z=-10$, înlocuiesc în sistem

$\begin{cases} x\cdot(-10)=20 \Rightarrow x=-2 \\ y\cdot(-10)=30 \Rightarrow y=-3 \\ z\cdot(-10)=50 \Rightarrow z=-5 \end{cases}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați: $\begin{cases} x\sqrt{yz}=4 \\ y\sqrt{xz}=9 \\ z\sqrt{xy}=16 \end{cases}$

E_1) deoarece $x\sqrt{yz}=4$ și $\sqrt{yz}\geq 0$, $4\geq 0 \Rightarrow x\geq 0$,

analog $y\geq 0$, $z\geq 0$

E_2) înmulțim relațiile: $xyz\sqrt{x^2y^2z^2}=4\cdot 9\cdot 16$

$\Rightarrow xyz\,|xyz|=(2\cdot 3\cdot 4)^2$ $\Bigg\}\Rightarrow$

Dar, $x,y,z\geq 0 \Rightarrow |xyz|=xyz$

E_3) $(xyz)^2=(2\cdot 3\cdot 4)^2 \Rightarrow xyz=\pm 24$

Dar, $x,y,z\geq 0 \Rightarrow xyz=24$

E_4) ridicăm la pătrat $\Rightarrow \begin{cases} x^2yz=16 \\ y^2xz=81 \\ z^2xy=256 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x(xyz)=16 \\ y(xyz)=81 \\ z(xyz)=256 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\cdot 24=16 \\ y\cdot 24=81 \\ z\cdot 24=256 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{16}{24}=\frac{2}{3} \\ y=\frac{81}{24}=\frac{27}{8} \\ z=\frac{256}{24}=\frac{32}{3} \end{cases}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați: $\begin{cases} x^2+xy+y=10 \\ x+xy+y^2=10 \end{cases}$

E_1) adun ec $\Rightarrow (x^2+y^2)+(x+y)+2xy=20$

E_2) dar, $x^2+y^2=S^2-2P \Rightarrow S^2-2P+S+2P=20$

$$S^2+S-20=0 \Rightarrow S_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{2\cdot 1}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} S_1=\frac{-1+9}{2}=4 \\ S_2=\frac{-1-9}{2}=-5 \end{cases}$$

E_3) $S_1=4 \Rightarrow x+y=4 \Rightarrow x=4-y$ înlor ec(1)

$$\Rightarrow (4-y)^2+(4-y)y+y=10$$

$$16-8y+y^2+4y-y^2+y=10$$

$$-3y=-6 \Rightarrow y=2$$

$$x=4-y=4-2=2$$

$$(x,y)\in\{(2,2)\}$$

E_4) $S=-5 \Rightarrow x+y=-5 \Rightarrow x=-5-y$ înlor

$$(-5-y)^2+(-5-y)y+y=10$$

$$25+10y+y^2-5y-y^2+y=10$$

$$6y=-15 \Rightarrow y=-\frac{15}{6}=-\frac{5}{2}$$

$$x=-5+\frac{5}{2}=-\frac{5}{2} \Rightarrow (x,y)\in\{(-\tfrac{5}{2},-\tfrac{5}{2})\}$$

Prof. Ovidiu Bădescu