PROGRESII GEOMETRICE

TERMEN GENERAL. SUMA PRIMILOR n TERMENI

Dacă b_n este p.g., se cere b_k și S_n în fiecare din situațiile:

1) $b_3 = 7,\ b_6 = 56,\ b_{11} = ?,\ S_{20} = ?$

2) $b_3 = 5,\ b_5 = 20,\ b_{18} = ?,\ S_{41} = ?$

3) $b_{11} = 24,\ b_9 = 6,\ S_{11} = ?$

4) $b_2 = 75,\ b_4 = 1875,\ S_{10} = ?$

5) $b_3 = \frac{2}{27},\ b_6 = \frac{2}{59049},\ S_{10} = ?$

6) $b_5 = 160,\ b_8 = 640,\ S_{20} = ?$

7) $b_2 = 18,\ b_5 = 162,\ S_{40} = ?$

8) $b_7 = 2,\ b_{10} = 54,\ S_{16} = ?$

9) $b_{10} = 3,\ b_{13} = 375,\ S_6 = ?$

10) $b_7 = 5,\ b_9 = 20,\ S_{14} = ?$

(1)

Fie b_n progr. geometrică, $b_3 = 7$, $b_6 = 56$

să se afle b_{11} și S_{20}

$E_1)$ $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$E_2)$ $b_3 = 7 \Rightarrow b_1 q^2 = 7$

$b_6 = 56 \Rightarrow b_1 \cdot q^5 = 56$

$E_3)$ împart: $\frac{b_1 q^5}{b_1 q^2} = \frac{56}{7} \Leftrightarrow q^3 = 8 \Rightarrow \boxed{q = 2}$

$E_4)$ $b_1 q^2 = 7 \Rightarrow b_1 \cdot 4 = 7 \Rightarrow \boxed{b_1 = \frac{7}{4}}$

$E_5)$ $b_{11} = b_1 \cdot q^{10} = \frac{7}{4} \cdot 2^{10} = \frac{7}{4} \cdot 4 \cdot 2^8 = 7 \cdot 2^8$

$E_6)$ $S_{20} = ?$, folosim $S_n = \begin{cases} \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}, & q \neq 1 \\ n b_1, & q = 1 \end{cases}$

$q = 2 \neq 1 \Rightarrow S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1} = \frac{\frac{7}{4}(2^{20} - 1)}{2-1}$

$= \frac{7}{4} \cdot (2^{20} - 1)$

Dacă b_n progr geometrică cu $b_3 = 5$ și $b_5 = 20$, calculați b_{18} și S_{41}

$E_1)$ $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow \begin{cases} b_3 = 5 \\ b_5 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 q^2 = 5 \\ b_1 q^4 = 20 \end{cases}$

$E_2)$ le împart $\Rightarrow \dfrac{b_1 q^4}{b_1 q^2} = \dfrac{20}{5} \Leftrightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = \pm 2$

$E_3)$ Caz I: $q = 2$ în $b_1 q^2 = 5 \Rightarrow b_1 \cdot 4 = 5 \Rightarrow b_1 = \dfrac{5}{4}$

$$b_{18} = b_1 q^{17} = \frac{5}{4} \cdot 2^{17} = \frac{5}{4} \cdot 4 \cdot 2^{15} = 5 \cdot 2^{15}$$

$$S_{41} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{5}{4}(2^{41} - 1)}{2 - 1} = \frac{5}{4}(2^{41} - 1)$$

$E_4)$ Caz II: $q = -2$ în $b_1 q^2 = 5 \Rightarrow b_1 \cdot 4 = 5 \Rightarrow b_1 = \dfrac{5}{4}$

$$b_{18} = b_1 q^{17} = \frac{5}{4} \cdot (-2)^{17} = \frac{5}{4} \cdot (-1) \cdot 2^{17} = -\frac{5}{4} \cdot 4 \cdot 2^{15}$$

$$\Rightarrow b_{18} = -5 \cdot 2^{15}$$

$$S_{41} = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{\frac{5}{4}((-2)^{41} - 1)}{-2 - 1} = \frac{\frac{5}{4}(-2^{41} - 1)}{-3}$$

$$= -\frac{5}{4}(2^{41} + 1) \cdot \frac{1}{-3} = \frac{5(2^{41} + 1)}{12}$$

$E_5)$ S_5: $\begin{cases} b_{18} = 5 \cdot 2^{15} \\ S_{41} = \frac{5}{4}(2^{41} - 1) \end{cases}$ sau $\begin{cases} b_{18} = -5 \cdot 2^{15} \\ S_{41} = \frac{5}{12}(2^{41} + 1) \end{cases}$

Dacă b_n progr. geometrică cu $b_{11} = 24$ și $b_9 = 6$, calculați S_{11}

E_1) folosim $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow b_{11} = b_1 \cdot q^{10}$

$b_9 = b_1 \cdot q^8$

E_2) avem sistemul $\begin{cases} b_1 \cdot q^{10} = 24 \\ b_1 \cdot q^8 = 6 \end{cases}$

„:": $\frac{b_1 q^{10}}{b_1 \cdot q^8} = \frac{24}{6}$

$\Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = \pm 2$

E_3) Caz I: $q = 2 \Rightarrow b_1 \cdot q^8 = 6 \Rightarrow b_1 = \frac{6}{2^8} = \frac{3}{2^7}$

$\Rightarrow S_{11} = \frac{b_1(q^{11}-1)}{q-1} = \frac{\frac{3}{2^7}(2^{11}-1)}{2-1} = \frac{3(2^{11}-1)}{2^7}$

Caz II: $q = -2 \Rightarrow b_1 \cdot q^8 = 6 \Rightarrow b_1 = \frac{6}{(-2)^8} = \frac{3}{2^7}$

$\Rightarrow S_{11} = \frac{b_1(q^{11}-1)}{q-1} = \frac{\frac{3}{2^7}((-2)^{11}-1)}{-2-1} = \frac{3(-2^{11}-1)}{2^7 \cdot (-3)} =$

$= \frac{-2^{11}-1}{2^7 \cdot (-1)} = \frac{2^{11}+1}{2^7}$