MULȚIMI DE NUMERE: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

Arătați că:

1) $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

2) $2,141141114\ldots \notin \mathbb{Q}$

3) $\sqrt{7} \notin \mathbb{Q}$

4) $3,13133133331\ldots \notin \mathbb{Q}$

5) dacă $0,(769230) = 0,a_1a_2a_3\ldots$ calculați $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{2008}$

6) calculați suma primelor 2012 zecimale pentru $\frac{2012}{7}$

7) $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$

8) $\sqrt{12} \notin \mathbb{Q}$

9) $5,1232232223\ldots \notin \mathbb{Q}$

10) calculați suma primelor 2016 zecimale pt $\frac{664}{495}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Arătați că $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

E_1) min (R.A.) $\not\exists$. $\sqrt{5} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ cu $\sqrt{5} = \frac{m}{n}$ unde $\frac{m}{n}$ ireductibilă

E_2) $\sqrt{5} = \frac{m}{n} \Rightarrow n\sqrt{5} = m \,/\,(\,)^2 \Rightarrow 5n^2 = m^2 \Rightarrow 5 \mid m^2$

E_3) Cum $5 = 1 \cdot 5 \Rightarrow 5$ nu are niciun factor pătrat perfect și $5 \mid m^2 \Rightarrow 5 \mid m \Rightarrow \exists m_1 \in \mathbb{Z}$ cu $\boxed{m = 5m_1}$ (1)

E_4) din $5n^2 = m^2$ și $m = 5m_1 \Rightarrow 5n^2 = (5m_1)^2 \Rightarrow$
$5n^2 = 25(m_1)^2 \Rightarrow n^2 = 5(m_1)^2 \Rightarrow 5 \mid n^2$

E_5) Cum $5 = 1 \cdot 5 \Rightarrow 5$ nu are niciun factor pătrat perfect și $5 \mid n^2 \Rightarrow 5 \mid n \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{Z}$ cu $\boxed{n = 5n_1}$ (2)

E_6) din (1) + (2) $\Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{5m_1}{5n_1}$ care nu e ireductibilă $\Rightarrow$ presupunerea făcută e falsă $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$

Obs.: dacă $a \mid m^2 \not\Rightarrow a \mid m$,
de exemplu $12 \mid 6^2$ și totuși $12 \nmid 6$

Obs 2: mereu $a \mid m^2$ și a nu are factori pătrate perfecte $\Rightarrow a \mid m$ e adevărată

Prof. Ovidiu Badescu

Arătați că $2,1411411114\ldots \notin \mathbb{Q}$

E_1) $(R, A.)$, $\forall a.a = 2,1411411114\ldots \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ a fracție zecimală finită (fals)

sau

a fracție zecimală periodică

E_2) Dacă a ar fi fracție zecimală periodică ar rezulta că perioada conține și cifra 1 și cifra 4

Dacă perioada ar avea n cifre $\Rightarrow$ între 1 și 4 ar fi cel mult „$n-2$" cifre, contradicție pt că nr. de cifre de 1 pt a este din ce în ce mai mare $\Rightarrow$ el depășește „$n-2$" cifre la un moment dat $\Rightarrow$ între 1 și 4 ar fi mai mult de $n-2$ cifre, contradicție

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $0,(769230) = 0,a_1 a_2 a_3 \ldots$

Se cere $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2008}$

E_1) $0,(769230)$ este fracție periodică simplă

E_2) $a_1 = 7, a_2 = 6, a_3 = 9, a_4 = 2, a_5 = 3, a_6 = 0$

$a_7 = 7, a_8 = 6 \ldots\ldots$

E_3) $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2008}$ poate fi grupată în grupe 6 termeni, vedem ce rămâne

E_4) $2008 \mid 6$
18 $\quad 334$
$=20$
18
$=28$
24
$=4$

$\Rightarrow$ 334 grupe de 6 cifre + primele 4 zecimale

E_5) $S = 334 \cdot (7+6+9+2+3+0) + (7+6+9+2)$

$S = 9042$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați suma primelor 2012 zecimale ale numărului $\frac{2012}{7}$

$E_1)$ $2012 : 7 = 287,428571428\ldots$

$20 - 14 = 61$
$61 - 56 = 52$
$52 - 49 = 30$
$30 - 28 = 20$
$20 - 14 = 60$
$60 - 56 = 40$
$40 - 35 = 50$
$50 - 49 = 10$
$10 - 7 = 30$
$30 - 28 = 20$

$\Rightarrow \frac{2012}{7} = 287,(428571)$

$E_2)$ perioada are 6 cifre, pentru a calcula $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2012}$ vedem câte grupe de 6 cifre care se repetă sunt și câte numere mai trebuie adunate

$\Rightarrow$ 335 grupe de (428571) și rămân primele 2 zecimale: 4+2

$E_3)$ $2012 : 6 = 335$

$20 - 18 = 21$
$21 - 18 = 32$
$32 - 30 = 2$

$E_4)$ $S = 335 \cdot (4+2+8+5+7+1) + (4+2)$

$= 335 \cdot 27 + 6 = 9045 + 6 = 9051$

Prof. Ovidiu Bădescu