Data:

CLASA A IX-A

SETUL 4
TRIGONOMETRIE IX

Prof. Ovidiu Bădescu

Colegiul Național
"Traian Lalescu", Reșița
An școlar

TRIGONOMETRIE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

CERCUL TRIGONOMETRIC

PARITATE, IMPARITATE, PERIODICITATE

FORMULE TRIGONOMETRICE FUNDAMENTALE

TRANSFORMAREA PRODUSELOR ÎN SUME

TRANSFORMAREA SUMELOR ÎN PRODUS

T. COSINUSULUI, STEWARD, LUNG. MEDIANEI

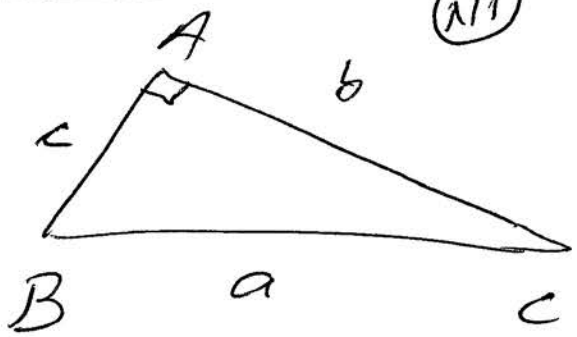
T. SINUSURILOR, ARII

Nivel 0: **pag**
Nivel *: **pag**
Nivel **: **pag**
Nivel *:** **pag**

TOTAL: **pag**

TRIGONOMETRIE ÎN TRIUNGHICUL DREPTUNGHIC

(XI1)

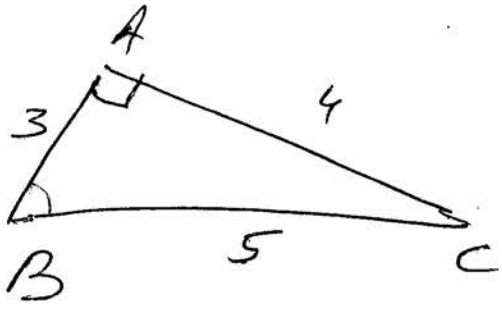


$$\sin \measuredangle = \frac{\text{cat. op}}{\text{ip}}$$

$$\cos \measuredangle = \frac{\text{cat alăt}}{\text{ip}}$$

$$\operatorname{tg} \measuredangle = \frac{\text{cat op}}{\text{cat alăt}}; \quad \operatorname{ctg} \measuredangle = \frac{\text{cat. alăt}}{\text{cat. op}}$$

Exp: ΔABC cu $AB=3$, $AC=4$ și $BC=5$



Se cere: a) ΔABC dreptunghic

b) $\sin B$

c) $\cos B$

d) $\operatorname{tg} B$

e) $\operatorname{ctg} B$

---

a) dacă ΔABC verifică $BC^2 = AB^2 + AC^2$

$\Rightarrow \Delta ABC$ dreptunghic

$BC^2 = 25$; $AB^2 + AC^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ egalitate

b) $\sin B = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$

c) $\cos B = \frac{AB}{BC} = \frac{3}{5}$

d) $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{3}$

e) $\operatorname{ctg} B = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$

TRANSFORMAREA DIN GRADE ÎN RADIANI ȘI DIN RADIANI ÎN GRADE

a) transformare din grade în radiani

$15^\circ = \dots$ în funcție de π

TEORIE: 180° ------ π .. (regula de 3 simplă)

15° ------ x

$$\Rightarrow x = \frac{15^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{12}$$

b) transformare din radiani în grade

- se înlocuiește π cu 180°

Exp: $\frac{7\pi}{3} = \frac{7 \cdot 180^{60^\circ}}{3} = 420^\circ$

Exp: $25^\circ \dots$ în funcție de π

180° ------ π

25° ------ x

$$\Rightarrow x = \frac{25^{5^\circ} \cdot \pi}{180^{36^\circ}} = \frac{5\pi}{36}$$

Exp 2: $\frac{5\pi}{6} = \frac{5 \cdot 180^\circ}{6} = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$

TABELUL TRIGONOMETRIC (N1)

E_1) se calculează sin, cos, tg, ctg pentru unghiuri de $0°$, $30°$, $45°$, $60°$, $90°$

E_2) pe linia de construcție se pun în ordine cifrele $0; 1; 2; 3; 4$ apoi se extrage rădăcina din fiecare $\sqrt{0}; \sqrt{1}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \sqrt{4}$ iar toate rezultatele se împart la 2 $\Rightarrow \frac{\sqrt{0}}{2}; \frac{\sqrt{1}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{4}}{2}$, adică

$$0; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 1$$

E_3) rezultatele finale se trec pe linia lui „sin", la „cos" se trec aceleași rezultate în ordine inversă, la „tg" folosim $tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x}$ iar la „ctg" se trec invers decât la „tg"

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin					
cos					
tg					
ctg					
linie de constr	0	1	2	3	4

$\Rightarrow$

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin					
cos					
tg					
ctg					
linie de constr	$\sqrt{0}$	$\sqrt{1}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{4}$

$\Rightarrow$

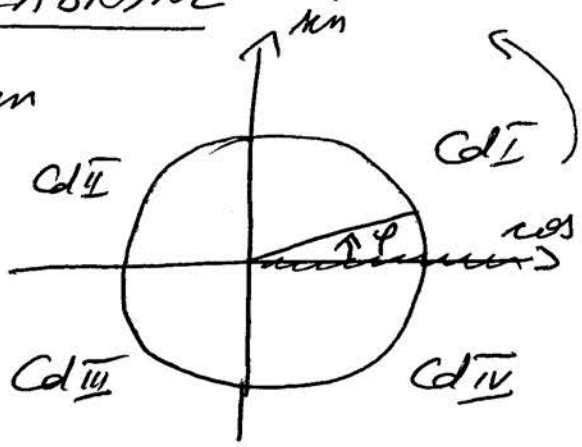
sin					
cos					
tg					
ctg					
linie de	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

$\Rightarrow$

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	\
ctg	\	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
linie de	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

SEMNELE LUI „sin" ȘI „cos" (N1)

ÎN CELE 4 CADRANE



E_1) cercul trigonometric este un cerc cu centrul în origine și raza $R=1$

E_2) orice unghi se măsoară pornind de la semiaxa pozitivă Ox în sens trigonometric (invers acelor de la ceas)

E_3) în loc de axa Ox avem axa cosinusurilor, în loc de axa Oy avem axa sinusurilor, deci în loc să avem $M(x,y)$ vom avea $M(\cos\varphi, \sin\varphi)$

E_4) ținând cont de semnele coordonatelor x și y în funcție de cele 4 cadrane, vom avea

$M \in Cd\,I \Leftrightarrow \begin{cases} \cos > 0 \\ \sin > 0 \end{cases}$	$M \in Cd\,II \Leftrightarrow \begin{cases} \cos < 0 \\ \sin > 0 \end{cases}$
$M \in Cd\,III \Leftrightarrow \begin{cases} \cos < 0 \\ \sin < 0 \end{cases}$	$M \in Cd\,IV \Leftrightarrow \begin{cases} \cos > 0 \\ \sin < 0 \end{cases}$

Ex.: Dacă $M \in Cd\,III$ și $|\cos x| = \frac{1}{3}$, se cere $\cos x$

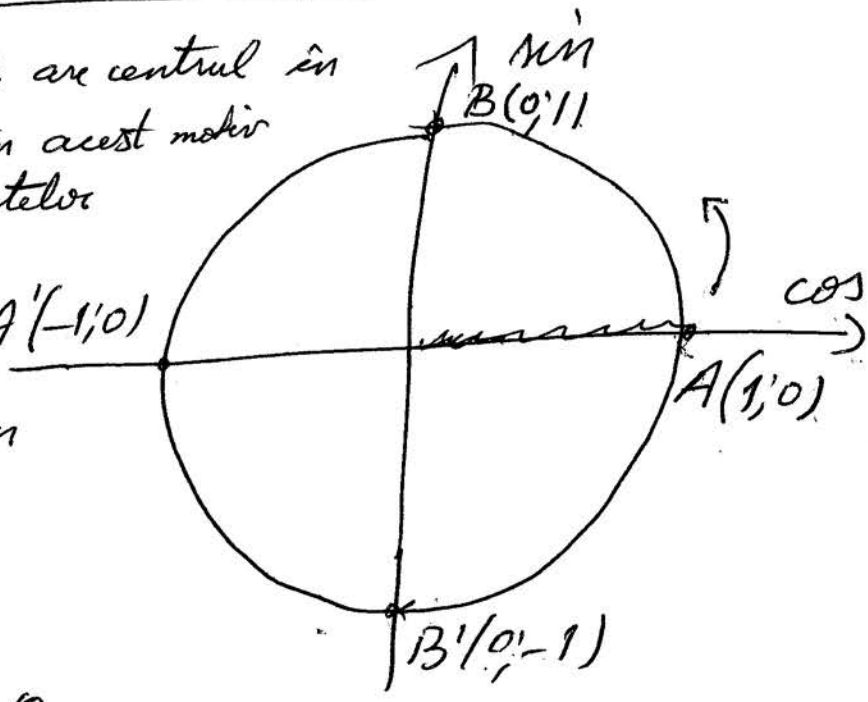
E_1) $M \in Cd\,III \Rightarrow \cos x < 0$

E_2) $|\cos x| = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos x = \pm\frac{1}{3}$

$\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{3}$

Valorile ale „cos" și „sin" în punctele de intersecție ale cercului cu axele

E_1) cercul trigonometric are centrul în origine și raza $R=1$, din acest motiv găsim coordonatele punctelor A, B, A' și B'



E_2) din cerc deducem

$$\begin{cases} \cos 0^\circ = 1 \\ \sin 0^\circ = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 90^\circ = 0 \\ \sin 90^\circ = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 180^\circ = -1 \\ \sin 180^\circ = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 270^\circ = 0 \\ \sin 270^\circ = -1 \end{cases}$$

E_3) în cer exprimările în sist. de π

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = 90^\circ;\ \pi = 180^\circ;\ \frac{3\pi}{2} = 270^\circ$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{2} = 0 \\ \sin \frac{\pi}{2} = 1 \end{cases}$$ și analogele

FORMULA FUNDAMENTALĂ A TRIGONOMETRIEI

(N1)

$$\boxed{\sin^2 x + \cos^2 x = 1,} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- se folosește atunci când știm valoarea unei funcții trigonometrice și ne trebuie valoarea celeilalte, iar semnul se alege în funcție de cadrane

Exp: calculați $\cos x$ dacă $x \in Cd\ II$ și $\sin x = \frac{1}{5}$

$E_1)$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\cos^2 x = 1 - \frac{1}{25} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{24}{25} \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{\frac{24}{25}}$

$\Rightarrow \cos x = \pm \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$E_2)$ $x \in Cd\ II \Rightarrow \cos x < 0$

$\Rightarrow \cos x = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$



Funcții complementare

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$$

Exp: $\sin 21^\circ = a$, x care $\cos 69^\circ = ?$

$\cos 69^\circ = \cos(90^\circ - 21^\circ) = \sin 21^\circ = a$

Exp 2: $\sin 13^\circ = a$, x care $\operatorname{tg} 77^\circ$

E1) $\operatorname{tg} 77^\circ = \dfrac{\sin 77^\circ}{\cos 77^\circ} =$

E2) $\sin 77^\circ = \sin(90^\circ - 13^\circ) = \cos 13^\circ$

E3) $\sin^2 13^\circ + \cos^2 13^\circ = 1 \Rightarrow a^2 + \cos^2 13^\circ = 1$

$\cos^2 13^\circ = 1 - a^2 \Rightarrow \cos 13^\circ = \pm\sqrt{1-a^2}$

E4) $13^\circ \in$ CdI $\Rightarrow \cos 13^\circ > 0 \Rightarrow \cos 13^\circ = \sqrt{1-a^2}$

$\sin 13^\circ = a \Rightarrow \operatorname{tg} 77^\circ = \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

PARITATE / IMPARITATE

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos x$

$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$

$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$

$\Rightarrow$ singura funcție **pară** este $\cos x$ " iar toate celelalte sunt " impare

---

Exemplu: $\cos(-17^\circ) = a$, se cere $\cos 17^\circ = ?$

$\cos(-17^\circ) = \cos 17^\circ \Rightarrow a = \cos 17^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 17^\circ = a$

Exemplu 2: $\sin(-17^\circ) = a$, se cere $\sin 17^\circ = ?$

$\sin(-17^\circ) = -\sin 17^\circ \Rightarrow a = -\sin 17^\circ$

$\Rightarrow \sin 17^\circ = -a$

PERIODICITATEA FUNCȚIILOR TRIG. (N1)

a) $\cos(x+2k\pi)=\cos x, \forall k\in\mathbb{Z}$ c) $\operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg}x, \forall k\in\mathbb{Z}$

b) $\sin(x+2k\pi)=\sin x, \forall k\in\mathbb{Z}$ d) $\operatorname{ctg}(x+k\pi)=\operatorname{ctg}x, \forall k\in\mathbb{Z}$

Obs.: în limbaj elementar, putem spune că „sin" și „cos" lasă afară număr par de π iar „tg" și „ctg" la afară atât număr par cât și impar de π

Obs 2.: dacă vrem să folosim periodicitatea pentru fracții, scoatem întâi întregii din fracții, folosind că $\frac{A}{B}=C+\frac{R}{B}$ unde C = câtul lui A:B iar R restul, apoi folosim periodicitatea

Ex 1: dacă $\sin x=\frac{1}{7}$, se cere $\sin(x+6\pi)$

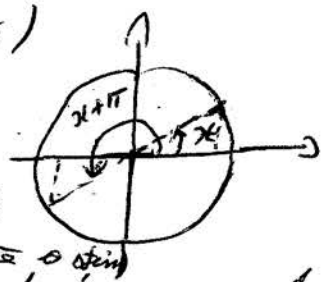
E1) $\sin(x+6\pi)=\sin x=\frac{1}{7}$

Ex 2: dacă $\cos x=-\frac{1}{3}$, se cere $\cos(x+11\pi)$

E1) $\cos(x+11\pi)=\cos(x+\pi+10\pi)=$ cos periodă $\cos(x+\pi)$

E2) Dem cere $\Rightarrow \cos(x+\pi)=-\cos x$

(sau cu formulă dacă o știm)



E3) Dar, $\cos x=-\frac{1}{3}\Rightarrow -\cos x=\frac{1}{3}$

Ex 3: $\operatorname{tg}x=9$, se cere $\operatorname{tg}(x+7\pi)$

E1) din $\operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg}x, \forall k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}(x+7\pi)=\operatorname{tg}x=9$

Ex 4: $\operatorname{ctg}x=-2$, se cere $\operatorname{ctg}(x-8\pi)$

E1) din $\operatorname{ctg}(x+k\pi)=\operatorname{ctg}x, \forall k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \operatorname{ctg}(x+k\pi)=\operatorname{ctg}x=-2$

Ex 4: calculați $\sin\frac{244\pi}{3}$

E1) $244 \mid 3$, $24=4$, $3=1$, 81 $\Rightarrow \frac{244}{3}=81+\frac{1}{3}$

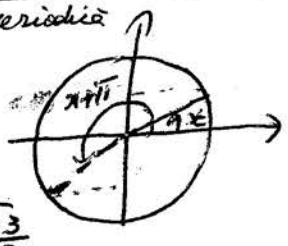
$\Rightarrow \frac{244\pi}{3}=81\pi+\frac{\pi}{3}$

E2) $\sin\frac{244\pi}{3}=\sin\left(\frac{\pi}{3}+81\pi\right)=$

$=\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi+80\pi\right)$ periodă $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)$

E3) Dar, $\sin(x+\pi)=-\sin x\Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(sau cu formulă)



Ex 5: calculați $\operatorname{tg}\frac{439\pi}{6}$

E1) $439 \mid 6$, $42=73$, $19=1$, 18 $\Rightarrow \frac{439}{6}=73+\frac{1}{6}$

$\Rightarrow \frac{439\pi}{6}=73\pi+\frac{\pi}{6}$

E2) $\operatorname{tg}\frac{439\pi}{6}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}+73\pi\right)$ = t periodă

$=\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

FORMULE TRIGONOMETRICE FUNDAMENTALE (N1)

a) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

„cos" păstrează același tip de funcție și schimbă semnul

b) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

„sin" schimbă funcția, păstrează semnul

c) $\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

$\operatorname{tg}(a-b) = \dfrac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

d) $\operatorname{ctg}(a+b) = \dfrac{1}{\operatorname{tg}(a+b)}$ și folosim formulele

Ex 1: $\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ) =$

$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Ex 2: $\sin 73^\circ \cos 17^\circ + \cos 73^\circ \sin 17^\circ =$

$= \sin(73^\circ + 17^\circ) = \sin 90^\circ = 1$

FORMULE PENTRU DUBLUL UNUI UNGHI (N1)

a) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

b) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ sau

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ sau

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

c) $\operatorname{tg} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

Dem:

a) $\sin 2x = \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x =$

$= 2 \sin x \cos x$

b) $\cos 2x = \cos(x+x) = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x =$

$= \cos^2 x - \sin^2 x$

c) $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}(x+x) = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x} = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$

Obs: $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\Big\}$ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

Dar, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

și analog, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

Exp: $\sin x = \dfrac{3}{5}$, x cere $\cos 2x = ?$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \dfrac{25}{1 - 2 \cdot \dfrac{9}{25}} = \dfrac{7}{25}$

FORMULE PENTRU JUMĂTĂȚEA UNUI UNGHI (11)

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

---

se deduc din: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\cos^2 x = 1+\cos 2x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Din $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \Rightarrow$

$$2\sin^2 x = 1 - \cos 2x \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Exp: $\sin \frac{\pi}{8} = ?$

$$E_1)\ \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{8}\right)}{2} = \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \frac{\pi}{8} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$E_2)\ \sin \frac{\pi}{8} = \pm \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$E_3)\ \frac{\pi}{8} = \frac{180^\circ}{8} = 22{,}5^\circ \in Cd\ I \Rightarrow \sin\frac{\pi}{8} > 0$$

$$E_4)\ \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

SUBSTITUȚIA UNIVERSALĂ (N2)

a) $\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; b) $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$; c) $\operatorname{tg} x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

---

a) E_1) $\sin x = \sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) \overset{\sin 2a}{=\!=} 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1}$

$$= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} \quad (*)$$

E_2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \Rightarrow \sin\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$

E_3) înloc în $(*) \Rightarrow \sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} =$

$$= \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right)} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

b) $\cos x = \cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right) \overset{\cos 2a}{=\!=} \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}$

E_2) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} \Rightarrow \sin\frac{x}{2} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}$

E_3) $\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}\left(1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\frac{x}{2}\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)}$

c) $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}}{\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$

d) $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \ldots = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$

TRANSFORMAREA PRODUSELOR ÎN SUME (N2)

a) $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$ c) $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$

b) $\cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$ d) $\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$

---

dem.:

a) să apară Sd intercalate ne gândim la $\sin(x+y)$, $\sin(x-y)$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ trebuie să rămână

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ $\sin x \cos y \Rightarrow$ adunăm

"+": $\sin(x+y)+\sin(x-y) = 2\sin x \cos y \Rightarrow \sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$

b) să apară Sd intercalate, ne gândim la $\sin(x+y)$, $\sin(x-y)$

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$ trebuie să rămână

$\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$ $\cos x \sin y \Rightarrow$ scădem

"−": $\sin(x+y)-\sin(x-y) = 2\cos x \sin y \Rightarrow \cos x \sin y = \frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$

c) să apară același tip de Sd, ne gândim la $\cos(x+y)$, $\cos(x-y)$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ trebuie să rămână $\cos x \cos y$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ $\Rightarrow$ adunăm

"+": $\cos(x+y)+\cos(x-y) = 2\cos x \cos y \Rightarrow \cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$

d) să apară același tip de Sd, ne gândim la $\cos(x+y)$, $\cos(x-y)$

$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ trebuie să rămână

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$ $\sin x \sin y$, scădem

"−": $\cos(x+y)-\cos(x-y) = -2\sin x \sin y \Rightarrow$

$$\sin x \sin y = -\frac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$$

TRANSFORMAREA SUMELOR ÎN PRODUS (N2)

a) $\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$	c) $\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
b) $\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$	d) $\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

Dem.:

a) $\sin x+\sin y=\sin(a+b)+\sin(a-b)=$

$=(\sin a\cos b+\cos a\sin b)+(\sin a\cos b-\cos a\sin b)=2\sin a\cos b$

Dar, $\begin{cases}a+b=x\\a-b=y\end{cases}$

„+": $2a=x+y\Rightarrow a=\frac{x+y}{2}$ „-": $2b=x+y\Rightarrow b=\frac{x-y}{2}$

Înlocuim $\Rightarrow \sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

b) $\sin x-\sin y=\sin(a+b)-\sin(a-b)=$

$=(\sin a\cos b+\cos a\sin b)-(\sin a\cos b-\cos a\sin b)=2\cos a\sin b$

Dar, $\begin{cases}a+b=x\\a-b=y\end{cases}\Rightarrow a=\frac{x+y}{2},\ b=\frac{x-y}{2}$

$\Rightarrow \sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$

c) $\cos x+\cos y=\cos(a+b)+\cos(a-b)=$

$=(\cos a\cos b-\sin a\sin b)+(\cos a\cos b+\sin a\sin b)=2\cos a\cos b$

Dar, $\begin{cases}a+b=x\\a-b=y\end{cases}\Rightarrow a=\frac{x+y}{2},\ b=\frac{x-y}{2}$

$\Rightarrow \cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

d) $\cos x-\cos y=\cos(a+b)-\cos(a-b)=$

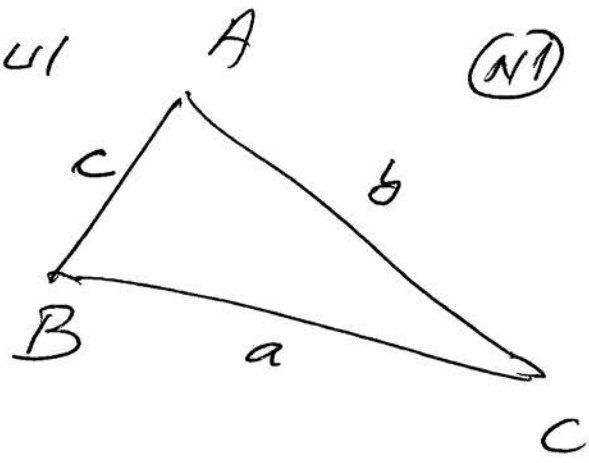
$=(\cos a\cos b-\sin a\sin b)-(\cos a\cos b+\sin a\sin b)=-2\sin a\sin b$

Dar, $\begin{cases}a+b=x\\a-b=y\end{cases}\Rightarrow a=\frac{x+y}{2},\ b=\frac{x-y}{2}$

$\Rightarrow \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

TEOREMA COSINUSULUI

(N1)



În $\triangle ABC$ notăm $BC=a$, $AB=c$ și $AC=b$. Avem:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$$

sau

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

sau

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

Exp: $a=?$ dacă $b=3$, $c=5$ și $m(\hat{A})=60^\circ$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$\Rightarrow a^2=9+25-2\cdot 3\cdot 5\cos 60^\circ$$

$$a^2=34-30\cdot\frac{1}{2}$$

$$a^2=34-15 \Rightarrow a^2=19$$

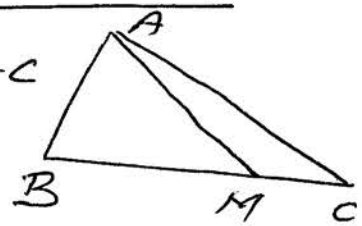
$$a=\pm\sqrt{19}\Bigg\} \Rightarrow a=\sqrt{19}$$

Deci, a lungime

RELAȚIA LUI STEWART. LUNGIMEA MEDIANEI (N2)

Relația lui Stewart

Dacă $B-M-C$ coliniare și A un punct exterior, atunci are loc:

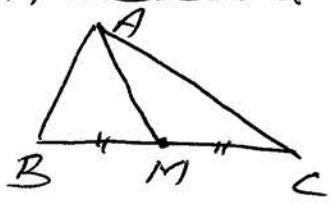


$$AB^2 \cdot MC - AM^2 \cdot BC + AC^2 \cdot BM = BM \cdot MC \cdot BC$$

Lungimea medianei

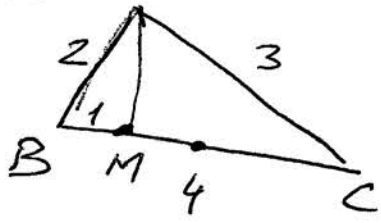
În $\triangle ABC$ cu AM mediană are loc

$$AM^2 = \frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$$



, analog pentru celelalte mediane

Exp: în $\triangle ABC$ avem $AB=2$, $AC=3$, $BC=4$ și fie $M \in (BC)$ cu $BM=1$, calculați lungimea lui AM A



E_1) $BC=4$ și $BM=1 \Rightarrow MC=3$

E_2) din STEWART $\Rightarrow$

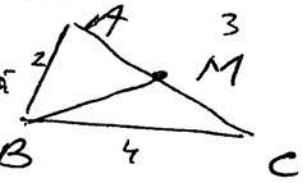
$AB^2 \cdot MC - AM^2 \cdot BC + AC^2 \cdot BM = BM \cdot MC \cdot AC$

$\Rightarrow 4 \cdot 3 - AM^2 \cdot 4 + 9 \cdot 1 = 1 \cdot 3 \cdot 4$

$\Rightarrow 12 - 4AM^2 + 9 = 12$

$4AM^2 = 9 \Rightarrow AM^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow AM = \frac{3}{2}$

Exp: în $\triangle ABC$, $AB=2$, $AC=3$, $BC=4$. Se cere lungimea medianei din B



E_1) BM mediană

$$\Rightarrow BM^2 = \frac{2(c^2+a^2)-b^2}{4}$$

$$\Rightarrow BM^2 = \frac{2(4+16)-9}{4} = \frac{31}{4}$$

$$\Rightarrow BM = \frac{\sqrt{31}}{2}$$

FORMULELE LUI NEPER (N3)

în ΔABC avem:

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}}$$

Exp 1: arătați că

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

E_1) din T cos $\Rightarrow \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

E_2) $\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}=$

$$=\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}=\frac{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}}{2}=$$

$$=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc}$$

$$=\frac{(a+b+c-2b)(a+b+c-2c)}{4bc}=$$

$$=\frac{(2p-2b)(2p-2c)}{4bc}=\frac{4(p-b)(p-c)}{4bc}=$$

$$=\frac{(p-b)(p-c)}{bc}=\sin^2\frac{A}{2}$$

E_3) $\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

Dar, $A\in(0;\pi)\Rightarrow\frac{A}{2}\in C_1\Rightarrow\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$

Exp 2: Dacă în ΔABC avem $3a=b+c$, să se arate

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$$

E_1) $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}\cdot\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}=$

$$=\sqrt{\frac{(p-a)^2(p-b)(p-c)}{p^2(p-b)(p-c)}}=\left|\frac{p-a}{p}\right|=$$

$$=\frac{p-a}{p}\text{ deoarece sunt }>0$$

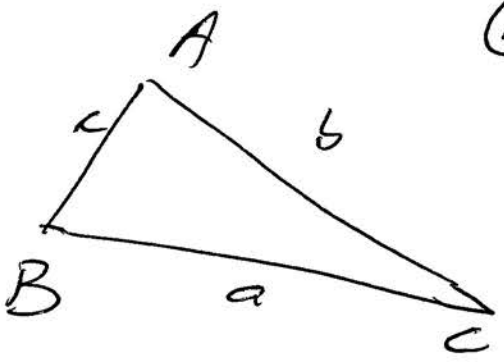
E_2) $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{\frac{a+b+c}{2}-a}{\frac{a+b+c}{2}}=$

$$=\frac{-a+b+c}{a+b+c}\overset{\text{în}}{=\!=}\frac{-a+3a}{a+3a}=$$

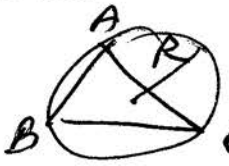
$$=\frac{2a}{4a}=\frac{1}{2}$$

(N1)

T. sinusurilor:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

unde R raza cercului circumscris (trece prin vârfuri 

)

Exp: $A = 45°$, $B = 30°$, $a = 8$ și se cere $b = ?$

E1) $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

E2) $\frac{8}{\sin 45°} = \frac{b}{\sin 30°} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

E3) $\frac{8}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{b}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 8 \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot b$

$\Rightarrow \sqrt{2} \cdot b = 4 \Rightarrow b = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

Exp 2: $A = 30°$, $a = 8$ se cere $R = ?$

$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{8}{\sin 30°} = 2R \Rightarrow \frac{8}{\frac{1}{2}} = 2R$

$\Rightarrow 8 = \frac{1}{2} \cdot 2R \Rightarrow R = 8$

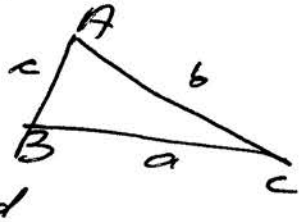
ARIA TRIUNGHIULUI

- din gimnaziu, $A_{\Delta ABC} = \frac{\text{baza} \cdot \text{înălțime}}{2} = \frac{l_1 \cdot l_2 \sin(\hat{l_1 l_2})}{2} =$

$= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ cu $p = \frac{a+b+c}{2}$

- la nivel de liceu, apar în plus formulele

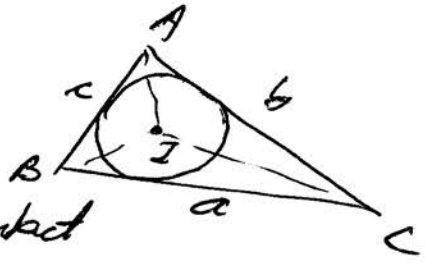
$A_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} = r \cdot p$ unde $R \to$ raza cerc circumscris, $r \to$ raza cerc înscris



dem.: din $A_{ABC} = \frac{l_1 \cdot l_2 \sin(\hat{l_1 l_2})}{2} = \frac{b \cdot c \sin A}{2}$

din T. sin $\Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{a}{2R}$ și înlocuind

$\Rightarrow A_{ABC} = \frac{b \cdot c \cdot \frac{a}{2R}}{2} = \frac{abc}{4R}$



din $A_{ABC} = A_{ABI} + A_{BCI} + A_{ACI}$,

cum rază ⊥ tangentă în punctul de contact

$\Rightarrow A_{ABC} = \frac{r \cdot c}{2} + \frac{r \cdot a}{2} + \frac{r \cdot b}{2} = r \cdot \frac{c+a+b}{2} = r \cdot p$

Obs 1: În loc de arie folosim denumirea de suprafață

$\Rightarrow S = \frac{a \cdot h_a}{2}$; $S = \frac{ab \cdot \sin C}{2}$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Obs 2: am dedus mai sus că $S = \frac{abc}{4S}$ și că $S = r \cdot p$

Obs 3: $A_{\Delta \text{dreptunghic}} = \frac{C_1 \cdot C_2}{2}$

Obs 4: $A_{\Delta \text{echilateral}} = \frac{l_1 \cdot l_2 \sin 60^\circ}{2} = \frac{l^2 \sqrt{3}}{4}$

Exp: găsiți aria ΔABC în situațiile: $a=3, b=6, c=7$ respectiv dacă $a=4, b=8$ și $m(\hat{C}) = 30^\circ$

E1) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3+6+7}{2} = 8$, $S = \sqrt{8(8-3)(8-6)(8-7)}$

$\Rightarrow S = \sqrt{8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1} = 4\sqrt{5}$

$r = \frac{a \cdot b \sin C}{2} = \frac{4 \cdot 8 \cdot \sin 30^\circ}{2} = \frac{16 \cdot \frac{1}{2}}{1} = 8$

DEDUCEREA RAZEI CERCULUI ÎNSCRIS (N1)
(notată r) ȘI A CERCULUI CIRCUMSCRIS (R)

E_1) S-a demonstrat că

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S}$$

E_2) S-a demonstrat că

$$S = r \cdot p \Rightarrow r = \frac{S}{p}$$

Ex1: Găsiți raza cercului circumscris în $\triangle ABC$ dacă

$a=6,\ b=8,\ c=10$

E_1) $R = \frac{abc}{4S}$

E_2) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6+8+10}{2} = 12$

E_3) $S = \sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)} = \sqrt{12 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} = \sqrt{12 \cdot 12 \cdot 4} =$

$= 12 \cdot 2 = 24$

E_4) $R = \frac{abc}{4S} = \frac{6 \cdot 8 \cdot 10^5}{4 \cdot 24} = 5$

Obs.: Puteam observa (dacă eram deștepți) că

$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow \triangle ABC$ dreptunghic $\Rightarrow S = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$

Obs2: Dacă eram și mai deștepți, știam că în $\triangle$ dreptunghic $R = \frac{\text{ipotenuza}}{2} = \frac{10}{2} = 5$

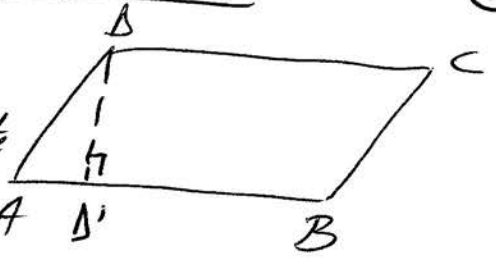
Ex2: Găsiți r dacă $a=3,\ b=6,\ c=7$

E_1) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2} = 8$, $S = \sqrt{8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1} = 4\sqrt{5}$

E_2) $r = \frac{S}{p} = \frac{4\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

ARIA PARALELOGRAMULUI

(N1)



E_1) $ABCD$ paralelogram, îl putem împărți în 2 Δ congruente ΔABC și ΔDAC

E_2) $\mathcal{A}_{ABCD} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC} = 2 \cdot \frac{AB \cdot DD'}{2} = AB \cdot DD' =$ baza · înălțimea

$\mathcal{A}_{ABCD} = 2\mathcal{A}_{ABC} = 2 \cdot \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2} = AB \cdot BC \cdot \sin B$

E_3) $\mathcal{A}_{ABCD} =$ baza · înălțimea

$\mathcal{A}_{ABCD} = l_1 \cdot l_2 \sin(\widehat{l_1, l_2})$

Exp. 1 Dacă $AB = 8$, $BC = 3$ și $m(B) = 30°$, se cere $\mathcal{A}_{ABCD}$ unde $ABCD$ paralelogram

---

E_1) $\mathcal{A}_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin \hat{B} = 8 \cdot 3 \cdot \sin 30°$

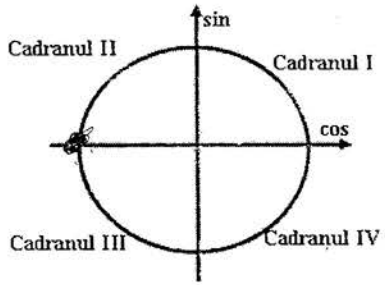
E_2) $\mathcal{A}_{ABCD} = \overset{4}{\cancel{8}} \cdot 3 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 12$

FORMULE TRIGONOMETRICE UZUALE

Tabelul trigonometric

	0	30	45	60	90
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	\
ctg	\	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
linie de construcție	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$

Cercul trigonometric



Semnele în cele 4 cadrane

$$x \in Cd.\mathrm{I} \Rightarrow \begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$$

$$x \in Cd.\mathrm{II} \Rightarrow \begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$$

$$x \in Cd.\mathrm{III} \Rightarrow \begin{cases} \cos x < 0 \\ \sin x < 0 \end{cases}$$

$$x \in Cd.\mathrm{IV} \Rightarrow \begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin x < 0 \end{cases}$$

Paritate, imparitate:

$\sin(-x) = -\sin x \qquad \cos(-x) = \cos x$

$tg(-x) = -tgx \qquad ctg(-x) = -ctgx$

Periodicitate

$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \forall k \in \mathbb{Z},$

$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \forall k \in \mathbb{Z}$

$tg(x + k\pi) = tgx, \forall k \in \mathbb{Z},$

$ctg(x + k\pi) = ctgx, \forall k \in \mathbb{Z}$

Formula trig fundamentală

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Formule trigon

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b$

$$tg(a+b) = \frac{tga + tgb}{1 - tga \cdot tgb}$$

$$tg(a-b) = \frac{tga - tgb}{1 + tga \cdot tgb}$$

$ctg(a+b) =$

$ctg(a-b) =$

Formule pentru dublul unui unghi

$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$$tg2x = \frac{2 \cdot tgx}{1 - tg^2 x}$$

$$ctg2x = \frac{(ctgx)^2 - 1}{2ctgx}$$

$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

$\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

Formule pentru jumătatea unui unghi

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Substituția universală

$$\sin a = \frac{2tg\frac{a}{2}}{1 + tg^2\frac{a}{2}}$$

$$\cos a = \frac{1 - tg^2\frac{a}{2}}{1 + tg^2\frac{a}{2}}$$

$$tga = \frac{2tg\frac{a}{2}}{1 - tg^2\frac{a}{2}}$$

Transformarea produselor în sume

$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$$

$$\cos a \cdot \sin b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) - \sin(a-b)\right)$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$$

$$\sin a \cdot \sin b = -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) - \cos(a-b)\right)$$

Transformarea sumelor în produs

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2\cos\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

$$\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$tga + tgb = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}$$

$$tga - tgb = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}$$

$$ctga + ctgb = \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}$$

$$ctga - ctgb = \frac{\sin(a-b)}{\sin a \sin b}$$