Data:

CLASA A IX-A

SETUL 3
GEOMETRIE IX

Prof. Ovidiu Bădescu

Colegiul Național
"Traian Lalescu", Reșița
An școlar

GEOMETRIE PLANĂ, RECAPITULARE

VECTORI

VECTORI DAȚI PRIN COORDONATE

PRODUS SCALAR

Nivel 0: **pag**
Nivel *: **pag**
Nivel **: **pag**
Nivel *:** **pag**

TOTAL: **pag**

CONDIȚIA CA 3 NUMERE REALE SĂ POATĂ FI LATURILE UNUI TRILUNGHI (*)

a, b, c pot fi lungimile laturilor unui Δ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ a < b + c \\ b < c + a \\ c < a + b \end{cases}$$

și intersectăm intervalele obținute (adică luăm doar valorile comune)

Exp.: Găsiți $x \in \mathbb{R}$ dacă numerele 3, x respectiv 5 pot fi lungimile laturilor unui Δ

E_1) Cond.: $\begin{cases} 3 > 0,\ x > 0,\ 5 > 0 \\ 3 < x + 5 \\ x < 3 + 5 \\ 5 < 3 + x \end{cases}$

E_2) $3 > 0$ adev $\forall x \in \mathbb{R}$

$x > 0 \Rightarrow x \in (0; \infty) = I_1 \Rightarrow \boxed{I_1 = (0; \infty)}$

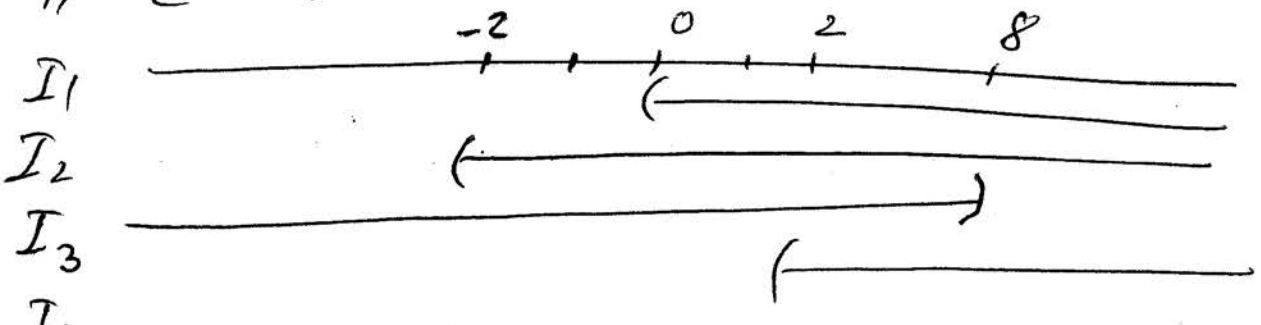
$5 > 0$ adev $\forall x \in \mathbb{R}$

E_3) $3 < x + 5 \Rightarrow x > -2 \Rightarrow \boxed{x \in (-2; \infty) = I_2}$

$x < 3 + 5 \Rightarrow x < 8 \Rightarrow \boxed{x \in (-\infty; 8) = I_3}$

$5 < 3 + x \Rightarrow x > 2 \Rightarrow \boxed{x \in (2; \infty) = I_4}$

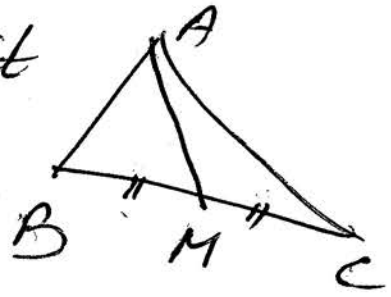
E_4) $I_C = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4$



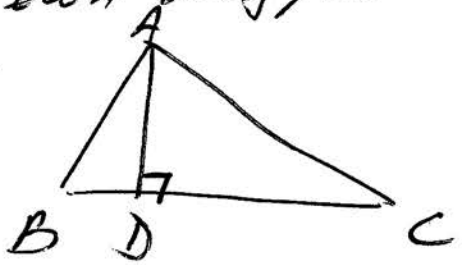
$\Rightarrow x \in (2; 8)$

LINII IMPORTANTE ÎN TRIUNGHI

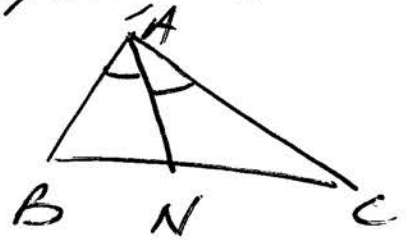
a) <u>mediana</u>: unește vf cu mijlocul laturii opuse. Se intersectează în G numit <u>centru de greutate</u>



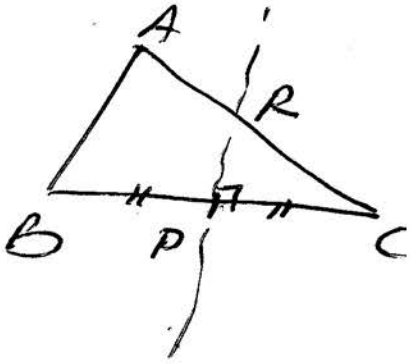
b) <u>înălțimea</u>: perpendiculara din vârf pe latura opusă. Se intersectează în H numit <u>ortocentru</u>



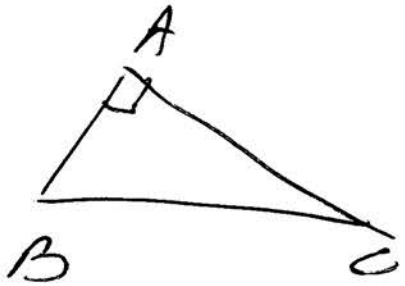
c) <u>bisectoarea</u>: împarte ∢ în 2 părți egale. Se intersectează în I numit <u>centrul arcului înscris</u>



d) <u>mediatoarea</u>: perpendiculara pe mijl laturii, poate să nu treacă prin vârf. Se intersectează în O numit <u>centrul cercului circumscris</u>



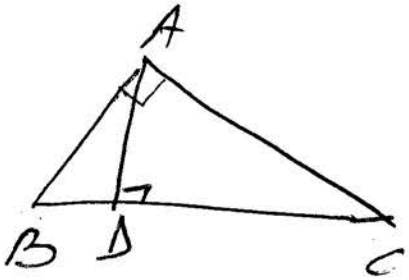
PROPRIETĂȚI ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC



a) T. Pitagora

Dacă $m(\hat{A}) = 90^\circ \Rightarrow$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

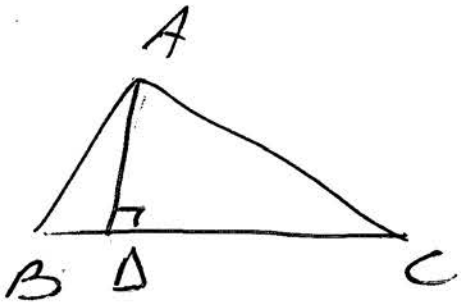


b) T. catetei

Dacă $m(\hat{A}) = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow AB^2 = B\Delta \cdot BC$

sau $AC^2 = C\Delta \cdot BC$



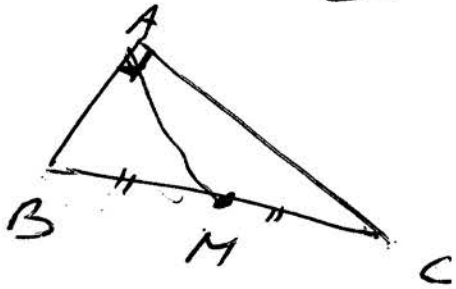
c) T. înălțimii:

Dacă $m(\hat{A}) = 90^\circ \Rightarrow$

$A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta C$

d) proprietatea medianei:

- dacă $m(A) = 90^\circ$, AM mediană $\Rightarrow AM = \frac{BC}{2}$



- dacă AM mediană și $AM = \frac{BC}{2} \Rightarrow m(\hat{A}) = 90^\circ$

TEOREMA LUI THALES. TEOREMA FUNDAMENTALĂ A ASEMĂNĂRII

TEOREMA LUI THALES

În $\triangle ABC$, dacă

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$



Obs.: e valabilă și reciproc, dacă $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC$

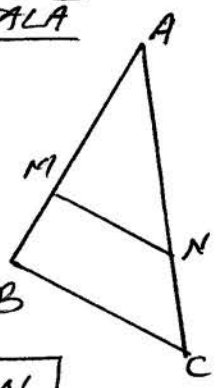
TEOREMA FUNDAMENTALĂ A ASEMĂNĂRII

În $\triangle ABC$, dacă

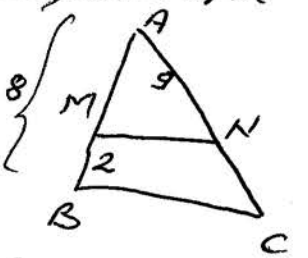
$$MN \parallel BC \Rightarrow \triangle AMN \sim \triangle ABC$$

Obs.: teorema e utilizată sub forma

$$MN \parallel BC \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



Exp 1: În $\triangle ABC$ cu $MN \parallel BC$, știm că $AB = 8$, $MB = 2$, $AN = 9$; se cere lungimea lui NC

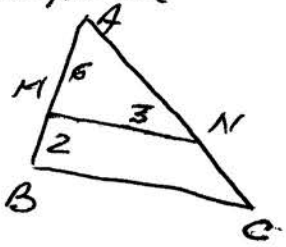


E1) $MN \parallel BC \xrightarrow{\text{THALES}}$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow \frac{6}{2} = \frac{9}{NC} \Rightarrow 6NC = 18$$

$$\Rightarrow NC = 3$$

Exp 2: În $\triangle ABC$ cu $MN \parallel BC$, $AM = 6$, $MB = 2$, $MN = 3$; se cere lungimea lui BC



E1) $MN \parallel BC \xrightarrow{\text{T la}}$ $\triangle AMN \sim \triangle ABC$

$$\Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6}{8} = \frac{3}{BC} \Rightarrow 6BC = 24$$

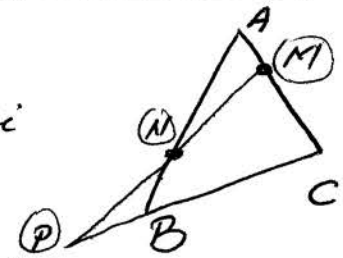
$$\Rightarrow BC = 4$$

TEOREMA LUI MENELAUS.
TEOREMA LUI CEVA

(**)

TEOREMA LUI MENELAUS

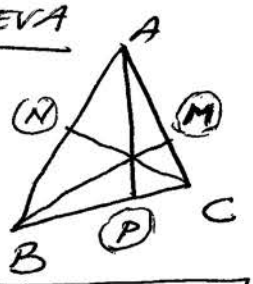
În $\triangle ABC$ cu $M \in AC$, $N \in AB$ și $P \in BC$ avem:



M, N, P coliniare $\Leftrightarrow \frac{AM}{MC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BN}{NA} = 1$

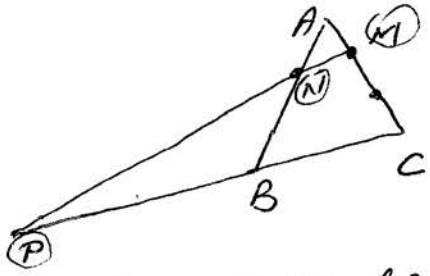
TEOREMA LUI CEVA

În $\triangle ABC$, $M \in (AC)$, $N \in (AB)$ și $P \in (BC)$ avem:



AM, BP, CN concurente $\Leftrightarrow \frac{AM}{MC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BN}{NA} = 1$

Ex 1: Dacă $M \in AC$ cu $\frac{AM}{MC} = \frac{1}{2}$, $P \in BC$ cu $\frac{CP}{PB} = \frac{4}{3}$ și $N \in AB$ cu M, N, P coliniare, găsiți $\frac{BN}{NA}$



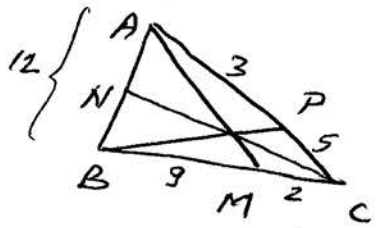
E_1) Din T. Menelaus, M, N, P coliniare

$\Leftrightarrow \frac{AM}{MC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BN}{NA} = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{BN}{NA} = 1$

$\Rightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{BN}{NA} = 1 \Rightarrow \frac{BN}{NA} = \frac{3}{2}$

Ex 2: În $\triangle ABC$, dreptele AM, BP și CN concurente și $AC = 8$, $AP = 3$, $MC = 2$, $BM = 9$, se cere lungimea lui AN



E_1) Din AM, BP și CN concurente

$\Rightarrow \frac{AP}{PC} \cdot \frac{CM}{MB} \cdot \frac{BN}{NA} = 1$

E_2) $\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{BN}{NA} = 1 \Rightarrow \frac{2}{15} \cdot \frac{BN}{NA} = 1$

$\Rightarrow \frac{BN}{NA} = \frac{15}{2}$ (1)

E_3) $AN = x \Rightarrow BN = AB - x \Rightarrow$

$\Rightarrow BN = 12 - x$ și înlocuim în (1)

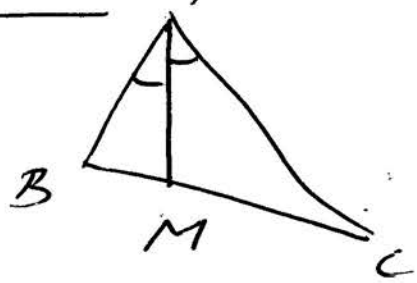
$\Rightarrow \frac{12-x}{x} = \frac{15}{2} \Rightarrow 24 - 2x = 15x$

$\Rightarrow 24 = 17x \Rightarrow x = \frac{24}{17}$

$\Rightarrow \boxed{AN = \frac{24}{17}}$

(*)

TEOREMA BISECTOAREI



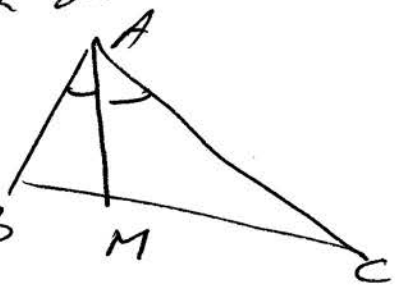
Fie $\triangle ABC$ și AM bisectoare $\measuredangle A$

Atunci: $\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{MC}$

Obs: Este valabilă și reciproca: dacă $M \in (BC)$ cu $\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{MC} \Rightarrow$ AM bisectoare

---

Exp.: Dacă $AB = 8$, $AC = 6$ și $BM = 3$, calculați BC știind că AM este bisectoarea din A



E_1) AM bisectoare $\xrightarrow{T. \text{ bisect}} \frac{AB}{AC} = \frac{BM}{MC}$

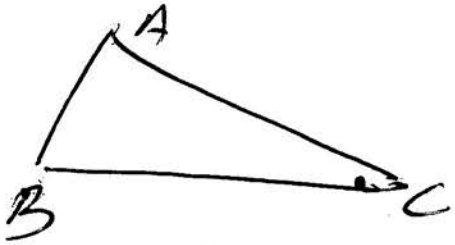
E_2) $\frac{8}{6} = \frac{3}{MC} \Rightarrow 8MC = 18 \Rightarrow MC = \frac{18}{8} = \frac{9}{4}$

E_3) $BC = BM + MC = 3 + \frac{9}{4} = \frac{21}{4}$

SUMA A DOI VECTORI

a) regula Δ: unde se termină primul vector, începe cel de-al doilea

Exp:



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ și

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

b) <u>regula paralelogramului</u>: ambii vectori pornesc din același vârf



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ și

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BA}$

<u>Obs!</u>: regula Δ se poate folosi și fără a face figura:

Exp: $\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BC}}=\overrightarrow{AE}$

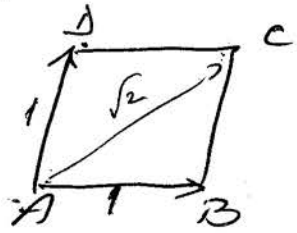
$\underbrace{\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$

MODULUL UNEI SUME DE VECTORI

E_1) se exprimă suma de vectori în funcție de același vector

E_2) se folosește $|\alpha \vec{v}| = |\alpha| \cdot |\vec{v}|, \forall \alpha \in \mathbb{R}^*$

Exp 1: Fie $ABCD$ pătrat de latură 1, calculați lungimea vectorului $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}$



$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AC} + \vec{AC} = 2\vec{AC}$ (regula paralelogr.)

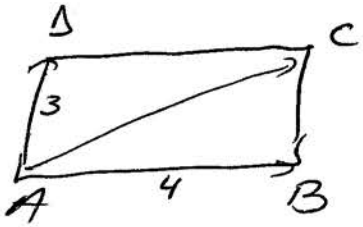
$|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}| = |2\vec{AC}| = |2| \cdot |\vec{AC}| = 2|\vec{AC}|$

Dar, în $\triangle ABC \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{2}$

$\Rightarrow |\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}| = 2\sqrt{2}$

Exp 2: Fie $ABCD$ dreptunghi cu $AB = 4$, $AD = 3$. Calculați

$|\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}|$



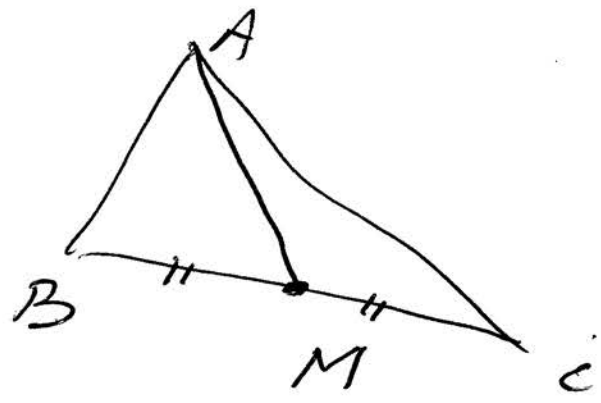
$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} = \vec{AC} + \vec{AC} = 2\vec{AC}$ (regula paralel.)

$\Rightarrow |\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}| = |2\vec{AC}| = 2|\vec{AC}|$

În $\triangle ABC \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 16 + 9 = 25$

$\Rightarrow AC = 5 \Rightarrow |\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD}| = 2 \cdot 5 = 10$

CONDIȚIA VECTORIALĂ CA AM mediană



AM mediană în $\triangle ABC$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

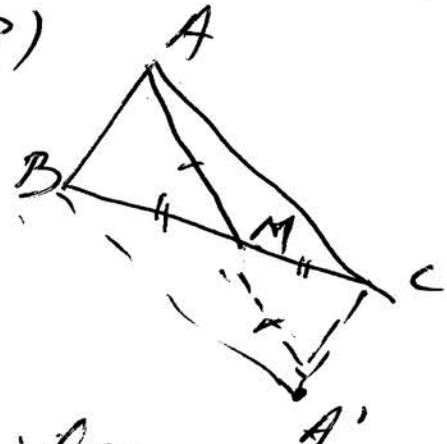
dem:

$\boxed{\Rightarrow}$ AM mediană, să arăt $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

E1) AM mediană, M mijloc $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$ și $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$

E2) adunăm $\Rightarrow 2\overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) + (\underbrace{\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}}_{\vec{0}})$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$



met II:

E1) Construim ABA'C paralelogram

$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

E2) ABA'C par $\Rightarrow$ diag se mijl

$\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AM} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$

$\boxed{\Leftarrow}$ Dacă $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}) \Rightarrow$ AM mediană

E1) Din paralelogram $\Rightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \Rightarrow$

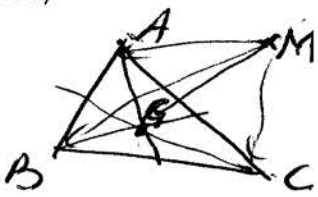
M mijl BC (mijl $AA' \Rightarrow$ e mijl BC)

CONDIȚII ECHIVALENTE CA G (N1)
CENTRU DE GREUTATE

G centru de greutate pentru $\Delta ABC \Leftrightarrow \vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$

G centru de greutate $\not\Delta ABC \Leftrightarrow \forall M \in$ Plan avem

$$\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{MC}=3\vec{MG}$$



Exp 1: Fie G centru de greutate pentru ΔABC. Găsiți $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $2a\vec{GA} - 3b\vec{GB} = \vec{GC}$

Din G centru de greutate $\not\Delta ABC \Rightarrow \vec{GA}+\vec{GB}+\vec{GC}=\vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{GC} = -\vec{GA} - \vec{GB}$$

Folosind ipoteza $\vec{GC} = 2a\vec{GA} - 3b\vec{GB}$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\vec{GA} - \vec{GB} = 2a\vec{GA} - 3b\vec{GB} \Big\} \Rightarrow$$

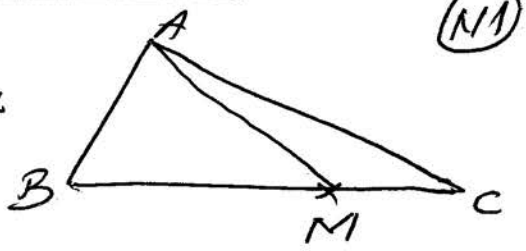
Dar, $(\vec{GA}, \vec{GB})$ necoliniari

$$-1 = 2a \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

$$-1 = -3b \Leftrightarrow b = \frac{1}{3}$$

ÎMPĂRȚIREA ÎN RAPORT k

(N1)



Dacă $\frac{BM}{MC} = k \Rightarrow \forall A$ exterior

avem $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AC}$

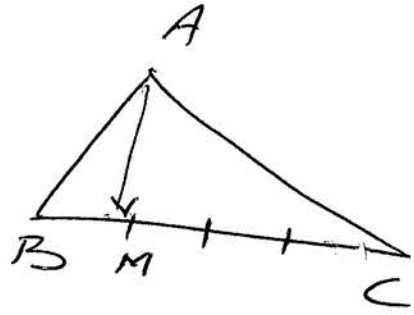
Dacă $\frac{CM}{MB} = k \Rightarrow \forall A$ exterior avem

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AC} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AB}$$

Obs.: Dacă la raportul k împărțirea se începe cu $B \Rightarrow$ primul vector „merge" tot către B, dacă se începe cu $C \Rightarrow$ primul vector merge către C.

Exp.: Fie ΔABC și $\overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{MB}$. Arătați că

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$



E_1) Situarea lui M:

Din $\overrightarrow{MC} = -3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{BM}$

$\Rightarrow MC$ și BM au ac. sens și

$MC = 3BM \Rightarrow \frac{MC}{BM} = \frac{3}{1} \Rightarrow \begin{matrix} MC = 3x \\ BM = x \end{matrix} \Rightarrow \frac{BM}{MC} = \frac{1}{3}$

E_2) Din $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}}\overrightarrow{AB} + \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{\frac{4}{3}}\overrightarrow{AB} + \frac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

SITUAREA PUNCTELOR DATE PRIN RELAȚII VECTORIALE

E_1) Se cere situarea lui M dacă $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{MB}$ sau $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{BM}$ sau $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{MB}$ ⇒ punctele A, B și M coliniare

E_2) din A, B, M coliniare putem avea șase ordonări: M-A-B; A-M-B; A-B-M

E_3) folosind sensul și lungimea vectorilor se situează M ținând cont că dacă $\overrightarrow{AM}=\frac{m}{n}\overrightarrow{BC}$ înseamnă că $\overrightarrow{AM}$ are m bucăți din cele n pe care le are $\overrightarrow{BC}$ și se împart segm. în bucăți

---

Ex1: Situați punctul M în situațiile:

a) $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$; b) $\overrightarrow{AM}=-3\overrightarrow{AB}$;

c) $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$; d) $\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$

---

a) $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$ ⇒ A, M și B coliniare

• Dacă ordinea este M-A-B ⇒ nu poate $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$ (pt că au sens diferit)

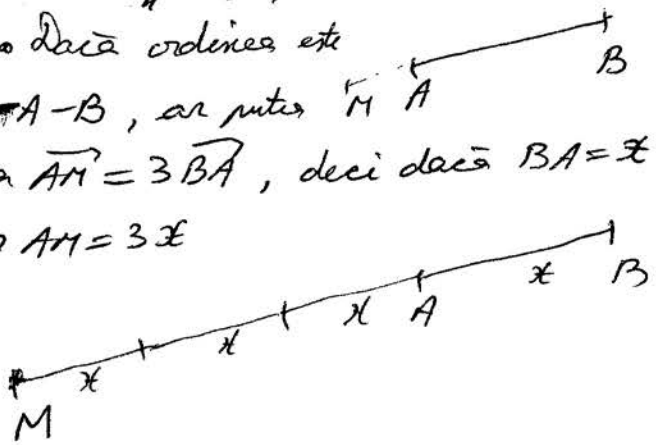


• Dacă ordinea este A-M-B ⇒ se poate ca $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MB}$ ⇒ MB are o bucată, MB=x iar $\overrightarrow{AM}$ are 3 bucăți, AM=3x ⇒ împărțim pe AB în 4 bucăți, AM=4x și AM are 3x



b) $\overrightarrow{AM}=-3\overrightarrow{AB}$, nu lucrăm cu semnul „-" ⇒ $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{BA}$

• Dacă ordinea este M-A-B, ar putea ca $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{BA}$, deci dacă BA=x ⇒ AM=3x

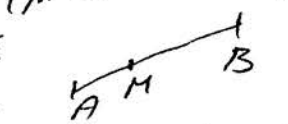


c) $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ ⇒ AM are 3 bucăți din cele 5 pe care le are $\overrightarrow{AB}$

• Dacă ordinea este M-A-B nu se poate ca $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ (pt că au sens diferit)



• Dacă ordinea este A-M-B, ar putea ca $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ ⇒ $\overrightarrow{AM}$ are 3 bucăți din cele 5 ale lui $\overrightarrow{AB}$ ⇒ împărțim AB în 5 ⇒ AB=5x și luăm AM=3x

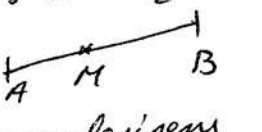


d) $\overrightarrow{AM}=-\frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$, nu lucrăm cu semnul „-" ⇒ $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BM}$ ⇒ punctele A, B și M coliniare

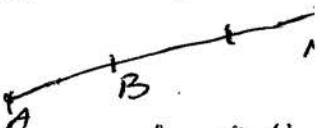
• Dacă ordinea este M-A-B nu se poate ca $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BM}$ pentru că, deși $\overrightarrow{AM}$ și $\overrightarrow{BM}$ au același sens, e clar că AM < BM deci nu poate fi $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BM}$



• Dacă ordinea este A-B-M, nu se poate ca $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BM}$ pt că nu au același sens



• Dacă ordinea este A-B-M, se poate ca $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BM}$ ⇒ AM are 3 bucăți din cele 2 ale lui BM ⇒ BM=2x, AM=3x și va trebui ca AB=x iar BM=2x



EXPRIMAREA UNUI VECTOR ÎN FUNCȚIE DE ALȚI VECTORI DAȚI (N2)

E1) se identifică punctele din relațiile din ipoteză

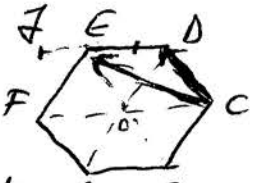
E2) se exprimă vectorii folosind regula triunghiului sau a paralelogramului

Obs.: dacă avem hexagon regulat, este util să ducem diagonalele, să găsim punctul lor de intersecție și să exprimăm vectorii ceruți în funcție de un vector ce trece prin acest punct

Ex.: Fie ABCDEF un hexagon regulat și punctele G, H, I, J, K și L astfel încât: $\overrightarrow{AG}=-3\overrightarrow{GB}$, $\overrightarrow{BH}=3\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{CI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}=2\cdot\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{EK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{KF}$ și $\overrightarrow{FA}=-4\overrightarrow{FL}$. Exprimați în funcție de $\overrightarrow{CD}$ și $\overrightarrow{CE}$ vectorii:

a) $\overrightarrow{BJ}$ b) $\overrightarrow{KG}$ c) $\overrightarrow{HI}$

d) $\overrightarrow{LE}$



a) $\overrightarrow{BJ}=?\overrightarrow{CD}+?\overrightarrow{CE}$

din $\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EJ}$ rezultă că avem J, E, D coliniare în ordinea J–E–D și $DE=2EJ$

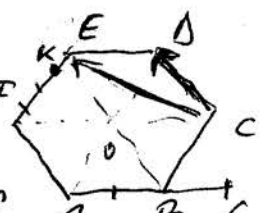
$\overrightarrow{BJ}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DJ}=(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})+\frac{3}{2}\overrightarrow{DE}=$

$=(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC})+\overrightarrow{CD}+\frac{3}{2}(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE})$

$=2\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CD}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CE}$

$=(2\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CD}-\frac{3}{2}\overrightarrow{CD})+(-\overrightarrow{CE}+\frac{3}{2}\overrightarrow{CE})$

$$\boxed{\overrightarrow{BJ}=\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}}$$



b) $\overrightarrow{KG}=?\overrightarrow{CD}+?\overrightarrow{CE}$

din $\overrightarrow{EK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{KF}\Rightarrow$ E, F, K coliniare

din $\overrightarrow{AG}=-3\overrightarrow{GB}\Rightarrow\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{BG}$

$\Rightarrow$ A, B, G coliniare în ordinea A–B–G

$\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{KE}+\overrightarrow{EG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{FE}+(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BG})$

$=\frac{1}{4}(\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CE})+2\overrightarrow{DC}+(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC})$

$=\frac{1}{4}\cdot 2\overrightarrow{ED}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CE}-2\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{ED}-\overrightarrow{CE}$

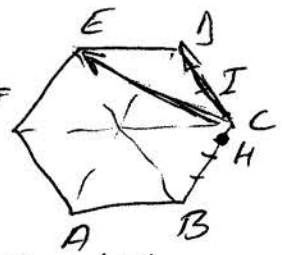
$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD})+\frac{1}{4}\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CE}$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}+\frac{1}{4}\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

$=-\frac{5}{4}\overrightarrow{CE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

$$\Rightarrow\boxed{\overrightarrow{KG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}-\frac{5}{4}\overrightarrow{CE}}$$

c) $\overrightarrow{HI}=?\overrightarrow{CD}+?\overrightarrow{CE}$



$\overrightarrow{BH}=3\overrightarrow{HC}\Rightarrow$ B, H, C col.

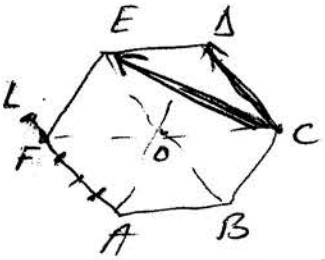
$\overrightarrow{CI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}\Rightarrow$ C, D, I

$\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}=$

$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC})+\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{3}\cdot 2\overrightarrow{CD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CE}+\frac{\overrightarrow{CD}}{3}$

$=\overrightarrow{CD}-\frac{1}{3}\overrightarrow{CE}$

d) $\overrightarrow{LE}=?\overrightarrow{CD}+?\overrightarrow{CE}$



$\overrightarrow{FA}=-4\overrightarrow{FL}\Rightarrow\overrightarrow{FA}=4\overrightarrow{LF}$

$\Rightarrow$ A, F, L coliniare

$\overrightarrow{LE}=\overrightarrow{LF}+\overrightarrow{FE}=$

$=\frac{1}{4}\overrightarrow{FA}+(\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CD})=\frac{1}{4}\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CD}$

$=-\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}+2(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{CD}=$

$=-\frac{1}{4}\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CE}+2\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\Rightarrow$

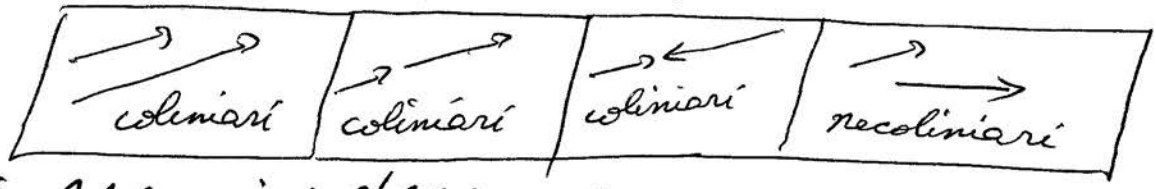
$$\overrightarrow{LE}=\frac{11}{4}\overrightarrow{CD}-2\overrightarrow{CE}$$

COLINIARITATEA A 2 VECTORI (N2)

met I: se alege o bază formată din 2 vectori necoliniari, se exprimă vectorii noștri în funcție de vectorii din bază și se arată că au coordonatele proporționale

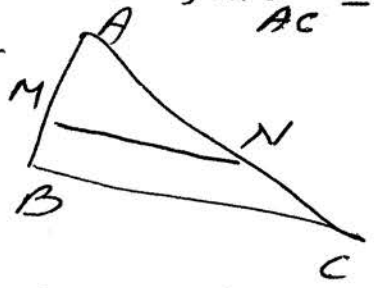
met II: se folosește că ($\vec{u}, \vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^*$ cu $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$)

Obs.: vectori coliniari sau vectori paraleli este același lucru



Ex.: Fie $\triangle ABC$ și $M \in (AB)$ cu $\frac{AM}{MB} = 3$, $N \in (AC)$ cu $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{4}$.

Arătați vectorial că $\vec{MN}$ și $\vec{BC}$ coliniari



E_1) Fie baza $(\vec{AB}, \vec{AC})$ formată din 2 vectori necoliniari

E_2) Exprimăm vectorii $\vec{MN}$ și $\vec{BC}$ în funcție de vectorii din bază

$\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN}$

E_3) Din $\frac{AM}{MB} = 3 \Rightarrow \frac{AM}{AM+MB} = \frac{3}{3+1} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{3}{4} \Rightarrow AM = \frac{3}{4} AB$

E_4) Deoarece $\vec{AM}$ și $\vec{AC}$ au același sens $\Rightarrow \vec{AM} = \frac{3}{4}\vec{AB}$

$\Rightarrow \vec{MA} = -\frac{3}{4}\vec{AB}$

E_5) $\frac{AN}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow AN = \frac{3}{4} AC$, vectorii $\vec{AN}$ și $\vec{AC}$ au ac sens

$\Rightarrow \vec{AN} = \frac{3}{4}\vec{AC}$

E_6) $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN} = -\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC} \Rightarrow \boxed{\vec{MN} = -\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}}$

E_7) În $\triangle ABC$, $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC} = -\vec{AB} + \vec{AC}$

E_8) $\vec{MN} = -\frac{3}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$; $\boxed{\vec{BC} = -\vec{AB} + \vec{AC}}$ și

$\frac{-\frac{3}{4}}{-1} = \frac{\frac{3}{4}}{1}$ adev $\Rightarrow$ coef proporționale $\Rightarrow \vec{MN}, \vec{BC}$ coliniare

$\Rightarrow \vec{BC} = -\frac{4}{3} \cdot \vec{MN} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{R}^*$ cu $\vec{BC} = k\vec{MN} \Rightarrow$ coliniare

COLINIARITATEA A 3 PUNCTE FOLOSIND COLINIARITATEA VECTORILOR

(N2)

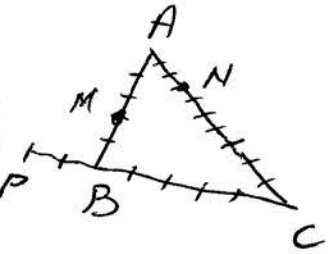
Se cere: A, B, C coliniare

E_1) Se arată că doi din vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sau oricare alți doi vectori formați cu aceste 3 puncte sunt coliniari

E_2) deoarece acei 2 vectori sunt coliniari și au un punct comun $\Rightarrow$ punctele A, B, C sunt coliniare

---

Ex.: în ΔABC, fie punctele M, N, P cu $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{CN} = \frac{7}{10}\overrightarrow{CA}$ și $\overrightarrow{BP} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{PC}$. Arătați vectorial că M, N și P coliniare



E_1) $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MB}$ $\Rightarrow A, M, B$ coliniare în ordinea $A-M-B$

E_2) $\overrightarrow{CN} = \frac{7}{10}\overrightarrow{NA} \Rightarrow C, N, A$ coliniare în ordinea $A-N-C$

E_3) $\overrightarrow{BP} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{PC} \Rightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{2}{7}\overrightarrow{CP} \Rightarrow$ B, P și C coliniare în ordinea $P-B-C$

E_4) Fie $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ bază, exprimăm pe $\overrightarrow{PM}$ și $\overrightarrow{PN}$ în funcție de vectorii din bază și arătăm că au coordonatele proporționale

E_5) $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BM} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BA}$

$= \frac{2}{5}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) - \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{PM} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}}$

E_6) $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CN} =$

$= \frac{7}{5}\overrightarrow{BC} + \frac{7}{10}\overrightarrow{CA} =$

$= \frac{7}{5}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) - \frac{7}{10}\overrightarrow{AC} =$

$= -\frac{7}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{5}\overrightarrow{AC} - \frac{7}{10}\overrightarrow{AC} \Rightarrow$

$\boxed{\overrightarrow{PN} = -\frac{7}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{7}{10}\overrightarrow{AC}}$

E_7) verific dacă

$\frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{7}{5}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{10}} \Leftrightarrow \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{10^2}{7} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$ adev

$\Rightarrow \overrightarrow{PM}$ și $\overrightarrow{PN}$ coliniari $\Rightarrow$

E_8) Dar, P comun

$\Rightarrow$ punctele P, M și N coliniare

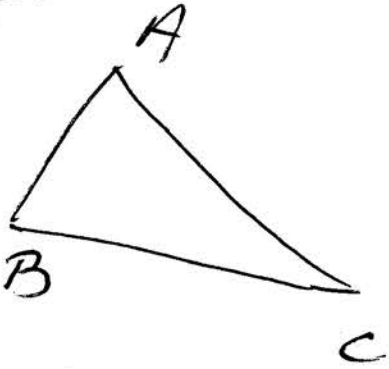
PROPRIETĂȚI ALE VECTORILOR NECOLINIARI

$\vec{u}, \vec{v}$ necoliniari $\Rightarrow$ din relația

$$a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow a = 0 \text{ și } b = 0$$

Obs.: Dacă avem o relație între 3 vectori, o exprimăm doar în funcție de maxim 2 vectori folosind regula Δ sau a paralelogramului

Exp.: Dacă $(m-1)\vec{AB} + n\vec{AC} = \vec{BC}$, se cere $m = ?$, $n = ?$ în ΔABC



E_1) Orice relație vectorială poate fi exprimată în funcție de cel mult 2 vectori necoliniari (cu un vect comun)

E_2) $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$ $\Rightarrow$ relația din ip

$$(m-1)\vec{AB} + n\vec{AC} = \vec{BA} + \vec{AC}$$

$$(m-1)\vec{AB} + n\vec{AC} + \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{0}$$

$$(m-1+1)\vec{AB} + (n-1)\vec{AC} = \vec{0}$$

$$m\vec{AB} + (n-1)\vec{AC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow m = 0 \text{ și } n = 1$$

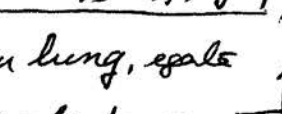
VECTORI CU COORDONATE

(N1)

1) coord vectorilor: dacă se știe $A(x_A, y_A)$ și $B(x_B, y_B)$ $\Rightarrow$

$\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}}$ unde

$\vec{i}, \vec{j}$ versori (au lung. egale cu 1 și sunt ⊥ ale două câte două)



Obs: dacă $\vec{u} = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} \Rightarrow$ $\vec{u}$ are coordonatele (x_u, y_u)

2) egalitatea a doi vectori: dacă $\vec{u} = x_u\vec{i} + y_u\vec{j}$ și $\vec{v} = x_v\vec{i} + y_v\vec{j}$ atunci

$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x_u = x_v \text{ și} \\ y_u = y_v \end{cases}$

3) modulul (lungimea) unui vector

dacă $\vec{u} = x_u\vec{i} + y_u\vec{j} \Rightarrow \boxed{|\vec{u}| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}}$

4) operații cu vectori dați prin coord

$\vec{u} + \vec{v} = (x_u + x_v)\vec{i} + (y_u + y_v)\vec{j}$

$\vec{u} - \vec{v} = (x_u - x_v)\vec{i} + (y_u - y_v)\vec{j}$

$\alpha\vec{u} = (\alpha x_u)\vec{i} + (\alpha y_u)\vec{j}$

5) condiția ca 2 vectori coliniari (paraleli)

$\boxed{\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v}}$

6) cond. ca 2 vectori perpendiculari

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x_u x_v + y_u y_v = 0$

7) produsul scalar

$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u \cdot x_v + y_u \cdot y_v}$

$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})}$

8) cosinusul unghiului a 2 vectori

$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{x_u x_v + y_u y_v}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Obs: dacă $\cos(\vec{u}, \vec{v}) > 0 \Rightarrow$ unghi ascuțit

dacă $\cos(\vec{u}, \vec{v}) < 0 \Rightarrow$ unghi obtuz

Exp 1: $A(1;3)$, $B(2;5) \Rightarrow$

$\overrightarrow{AB} = (2-1)\vec{i} + (5-3)\vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{i} + 2\vec{j}$

Exp 2: $m, n = ?$ dacă $\vec{u} = \vec{v}$ pt $\vec{u} = 3\vec{i} + (m+1)\vec{j}$ și $\vec{v} = (n-1)\vec{i} + 5\vec{j}$

$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = n-1 \\ m+1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} n = 4 \\ m = 5 \end{matrix}$

Exp 3: $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$, $\vec{v} = -2\vec{j} \Rightarrow$

$|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = 5$ și

$|\vec{v}| = \sqrt{0^2 + (-2)^2} = 2$

Exp 4: $\vec{u} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{v} = 8\vec{i} - 2\vec{j}$, se cere $\vec{u} - 3\vec{v} = ?$

$\vec{u} - 3\vec{v} = (3\vec{i} + 4\vec{j}) - 3(8\vec{i} - 2\vec{j}) =$

$= (3 - 24)\vec{i} + (4 + 6)\vec{j} = -21\vec{i} + 10\vec{j}$

Exp 5: $\vec{u} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$, $\vec{v} = a\vec{i} + 6\vec{j}$, se cere $a = ?$ dacă a) $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari b) $\vec{u} \perp \vec{v}$

a) $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \frac{2}{a} = \frac{4}{6} \Rightarrow a = 3$

b) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow 2 \cdot a + 4 \cdot 6 = 0 \Rightarrow a = -12$

Exp 6: $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{v} = 4\vec{i} + 5\vec{j} \Rightarrow$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 5 = 8 - 15 = -7$

Exp 7: $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 5$, $m(\vec{u}, \vec{v}) = 60°$

$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \cdot 5 \cdot \cos 60° = 20 \cdot \frac{1}{2} = 10$

Exp 8: se cere $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ dacă $\vec{u} = 2\vec{i}$, $\vec{v} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2 \cdot 3 + 0 \cdot (-4)}{\sqrt{2^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

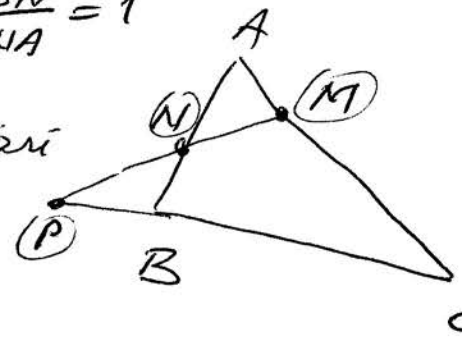
$\Rightarrow$ unghiul e ascuțit

DEMONSTRAREA T. MENELAUS

(N3)

Fie ΔABC și $M \in AC, N \in AB, P \in BC$, atunci

M, N, P coliniare $\Leftrightarrow \frac{AM}{MC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BN}{NA} = 1$



E_1) M, N, P coliniare $\Leftrightarrow (\vec{MN}, \vec{MP})$ coliniari $\Leftrightarrow$ exprimați în aceeași bază au coord proport. Fie baza $(\vec{AB}, \vec{AC})$

E_2) Fie $\frac{AM}{MC} = \alpha$, $\frac{CP}{PB} = \beta$, $\frac{BN}{NA} = \gamma$ și dacă arătăm că $\alpha\beta\gamma = 1$, atunci problema e rezolvată

E_3) $\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN} = \frac{AM}{AC} \cdot \vec{CA} + \frac{AN}{AB} \cdot \vec{AB}$

E_4) dar, $\frac{AM}{MC} = \alpha \Rightarrow \frac{AM}{AM+MC} = \frac{\alpha}{\alpha+1} \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{\alpha}{\alpha+1}$

dar, $\frac{BN}{NA} = \gamma \Rightarrow \frac{BN+NA}{NA} = \frac{\gamma+1}{1} \Rightarrow \frac{BA}{AN} = \frac{\gamma+1}{1} \Rightarrow \frac{AN}{AB} = \frac{1}{\gamma+1}$

E_5) $\vec{MN} = \frac{\alpha}{\alpha+1} \cdot \vec{CA} + \frac{1}{\gamma+1}\vec{AB} \Rightarrow \boxed{\vec{MN} = \frac{1}{\gamma+1}\vec{AB} - \frac{\alpha}{\alpha+1}\vec{AC}}$

E_6) $\vec{MP} = \vec{MC} + \vec{CP} = \frac{MC}{CA} \cdot \vec{AC} + \frac{CP}{CB} \cdot \vec{CB}$

E_7) dar, $\frac{AM}{MC} = \alpha \Rightarrow \frac{AM+MC}{MC} = \frac{\alpha+1}{1} \Rightarrow \frac{AC}{MC} = \alpha+1 \Rightarrow \frac{MC}{AC} = \frac{1}{\alpha+1}$

E_8) dar, $\frac{CP}{PB} = \beta \Rightarrow \frac{CP}{CP-PB} = \frac{\beta}{\beta-1} \Rightarrow \frac{CP}{CB} = \frac{\beta}{\beta-1}$

E_9) $\vec{MP} = \frac{1}{\alpha+1}\vec{AC} + \frac{\beta}{\beta-1}(\vec{CA}+\vec{AB}) = \left(\frac{\beta-1}{\alpha+1} - \frac{\alpha+1}{\beta-1}\right)\vec{AC} + \frac{\beta}{\beta-1}\vec{AB}$

$\Rightarrow \vec{MP} = \frac{\beta}{\beta-1}\vec{AB} + \frac{\beta-1-\alpha\beta-\beta}{(\alpha+1)(\beta-1)}\vec{AC} \Rightarrow \boxed{\vec{MP} = \frac{\beta}{\beta-1}\vec{AB} - \frac{\alpha\beta+1}{(\alpha+1)(\beta-1)}\vec{AC}}$

E_{10}) $\vec{MN}, \vec{MP}$ coliniari $\Leftrightarrow$ au coord proporționale $\Leftrightarrow$

$$\frac{\frac{1}{\gamma+1}}{\frac{\beta}{\beta-1}} = \frac{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}{-\frac{\alpha\beta+1}{(\alpha+1)(\beta-1)}} \Leftrightarrow \frac{\beta-1}{\beta(\gamma+1)} = \frac{\alpha}{\alpha+1} \cdot \frac{(\alpha+1)(\beta-1)}{\alpha\beta+1}$$

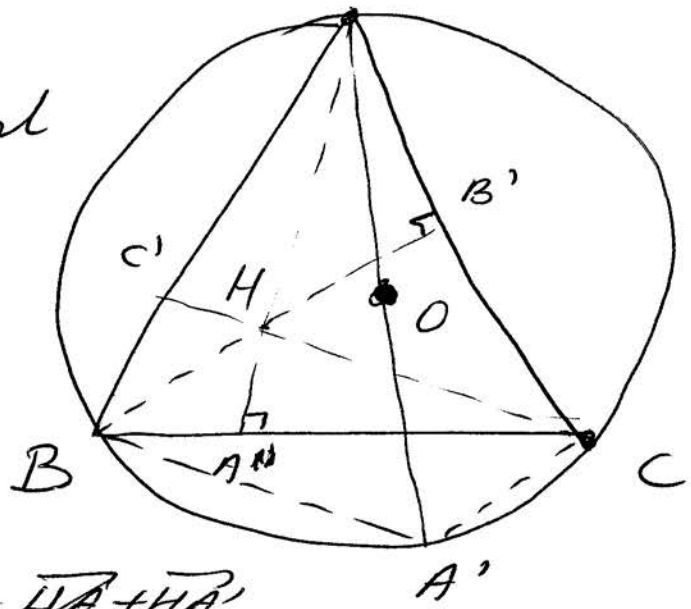
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\beta(\gamma+1)} = \frac{\alpha}{\alpha\beta+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta\gamma + \alpha\beta + 1 = \alpha\beta + \alpha \Leftrightarrow \alpha\beta\gamma = 1$$

RELAȚIA LUI SILVESTER (N3)

$$\boxed{\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}}$$

unde H este ortocentrul $\triangle ABC$ iar O este centrul cercului circumscris



E_1) Fie A' punctul diametral opus lui A $\Rightarrow$ O mijl lui AA'
$\Rightarrow$ HO mediană în $\triangle AHA'$
$\Rightarrow \overrightarrow{HO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HA'})$
$\Rightarrow 2\overrightarrow{HO}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HA'}$

E_2) Concluzia $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HA'}$ este echivalentă cu $\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA'}$ care s-ar întâmpla doar dacă HBA'C ar fi paralelogram

E_3) AA' diametru $\Rightarrow m(\widehat{ABA'})=90^\circ \Rightarrow AB\perp BA'$
Dar, CC' înălț $\Rightarrow CC'\perp AB \Rightarrow AB\perp CH$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow BA'\parallel HC$

E_4) Rt a arăta că $BH\parallel A'C$, deoare $BH\perp AC$ ar trebui arătat că $A'C\perp AC$, adev. știm că AA' diametru
$\Rightarrow m(\widehat{ACA'})=90^\circ$

E_5) așadar, $BA'\parallel HC$ și $BH\parallel A'C \Rightarrow BA'CH$ paralelogram
$\Rightarrow \overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{HA'} \Rightarrow$ ceea ce trebuia demonstrat

Obs.: Se poate deduce relația II a lui Silvester

$$\boxed{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}}$$

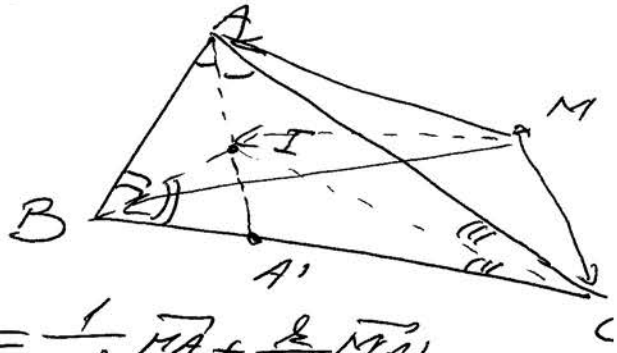
$\ldots + 3\overrightarrow{OH} \Rightarrow (\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA})+(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HB})+$

RELAȚIA VECTORIALĂ PENTRU CENTRUL CERCULUI ÎNSCRIS

(N3)

$\forall M$ pct din plan $\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{MI} = \frac{a}{a+b+c}\overrightarrow{MA} + \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{MB} + \frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{MC}}$

unde I este centrul cercului înscris în $\triangle ABC$



E_1) I, centrul cercului înscris este intersecția bisectoarelor

E_2) în $\triangle AMC$, dacă $\frac{AI}{IA'} = k \Rightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{MA} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{MA'}$

E_2) pentru a găsi $k = \frac{AI}{IA'}$, folosim că CI bisect în $\triangle ACA'$

$\overset{T.\text{bisect}}{\Longrightarrow} \frac{CA}{CA'} = \frac{AI}{IA'} \Rightarrow \frac{b}{CA'} = k$

E_3) în $\triangle ABC$, AA' bisect $\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BA'}{A'C} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{BA'}{A'C}$,

adunăm numărătorii $\Rightarrow \frac{c+b}{b} = \frac{BA'+A'C}{A'C} \Rightarrow \frac{c+b}{b} = \frac{a}{A'C} \Rightarrow$

$\Rightarrow A'C = \frac{ab}{c+b}$

E_4) revenim la E_2) $\Rightarrow \frac{b}{\frac{ab}{b+c}} = k \Rightarrow b \cdot \frac{b+c}{ab} = k \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{b+c}{a}$

E_5) În $\triangle MBC \Rightarrow \overrightarrow{MA'} = \frac{1}{1+k}\overrightarrow{MB} + \frac{k}{1+k}\overrightarrow{MC}$ unde $k = \frac{BA'}{A'C}$

E_6) cu T. bisect în $\triangle ABC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BA'}{A'C} \Rightarrow \frac{BA'}{A'C} = \frac{c}{b}$

E_7) $\Rightarrow \overrightarrow{MA'} = \frac{1}{1+\frac{c}{b}}\overrightarrow{MB} + \frac{\frac{c}{b}}{1+\frac{c}{b}}\overrightarrow{MC} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{MB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{MC}$

E_8) înlocuim în E_2) pe $k = \frac{b+c}{a}$ și pe $\overrightarrow{MC}$ de mai sus

$\Rightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{1}{1+\frac{b+c}{a}}\overrightarrow{MA} + \frac{\frac{b+c}{a}}{1+\frac{b+c}{a}} \cdot \left(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{MB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{MC}\right)$

, c $\overrightarrow{MI}$