Data:

CLASA A IX-A

SETUL 2
ALGEBRĂ IX, partea 2

Prof. Ovidiu Bădescu

Colegiul Național
"Traian Lalescu", Reșița
An școlar

FORMA CANONICĂ A UNEI FUNCȚII

RELAȚIILE LUI VIETE

SISTEME SIMETRICE, SISTEME OMOGENE

FUNCȚII PERIODICE, FUNCȚII PARE, IMPARE

FUNCȚIA DE GRADUL I

FUNCȚIA DE GRADUL II

Nivel 0: **pag**
Nivel *: **pag**
Nivel **: **pag**
Nivel *:** **pag**

TOTAL: **pag**

FORMA CANONICĂ A EXPRESIEI DE GR II

(N2)

Dacă avem $E(x)=ax^2+bx+c$

$\Rightarrow$ forma canonică este

$$E(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

Exp. 1: scrieți sub formă canonică: $E(x)=2x^2+x+3$

$E_1)$ $E(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$

$E_2)$ $\Delta=b^2-4ac=1-4\cdot2\cdot3=-23$

$$\Rightarrow E(x)=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{4\cdot2}$$

$$E(x)=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{23}{8}$$

Exp 2: scrieți sub formă canonică

$E(x)=x^2-2x+3$

$E_1)$ $E(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$

$E_2)$ $E(x)=1\left(x+\frac{-2}{2\cdot1}\right)^2-\frac{4-4\cdot3}{4\cdot1}$

$$E(x)=(x-1)^2-\frac{-8}{4}$$

$$E(x)=(x-1)^2+2$$

Exp.: Deduceți că

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

$E_1)$ $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=$

$=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4c}{a}\right)=$

$=a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)=$

$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$

Exp.: Deduceți că ecuația $ax^2+bx+c=0$ are rădăcinile $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$ dacă $\Delta\geq0$

$E_1)$ din formă canonică,

$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow$

$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=0 \Leftrightarrow$

$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow$

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}\ /\sqrt{\ldots}$

$\Leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

CONDIȚII PENTRU ECUAȚIA DE GRADUL II

$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$

Dacă $\Delta \geq 0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Dacă $\Delta<0 \Rightarrow$ ec. nu are rădăcini reale

Obs1: Dacă se cere condiția ca o ecuație să aibă rădăcini reale $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

Obs2: Dacă se cere condiția ca o ecuație să aibă rădăcini reale distincte: $\Delta>0$

Obs3: Dacă se cere condiția ca o ecuație să aibă rădăcini reale egale: $\Delta=0$

Exp: $x^2-2x+m=0$

$m=?$ a.î. ec. are 2 rădăcini reale distincte

$\Delta>0 \Leftrightarrow b^2-4ac>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-2)^2-4\cdot 1\cdot m>0$

$4-4m>0 \Rightarrow -4m>-4 \mid :(-1)$

$\dots \in (-\infty, 1)$

INTERVALUL ÎN CARE VARIAZĂ RĂDĂCINILE UNEI EC. DE GRAD II

(N3)

E_1) ec. de gr II depinde de un parametru ce apare la pătrat

E_2) se formează ec. de gr II în m, se pune condiția ca $m \in \mathbb{R} \Rightarrow$ denterval în care este sidrat $\#$, acel interval este intervalul în care variază rad

---

Exp: $2x^2 - 2mx + m^2 - 2m = 0$

intervalul în care variază rădăcinile (?)

E_1) ec. de gr II în $m \Rightarrow m^2 - 2m(x+1) + 2x^2 = 0$

E_2) $m \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta_m \geq 0 \Rightarrow [-2(x+1)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2x^2 \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4(x+1)^2 - 8x^2 \geq 0 \mid :4$

E_3) $(x+1)^2 - 2x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 - 2x^2 \geq 0$

$\Rightarrow -x^2 + 2x + 1 \geq 0 \mid \cdot(-1)$

E_4) $x^2 - 2x - 1 \leq 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{2(1 \pm \sqrt{2})}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

E_5)

		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$	
x^2-2x-1	$+ +$	0	$- - -$	0	$+ + +$

$\Rightarrow I = [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$

RELAȚIILE LUI VIETE PT ECUAȚIA DE GRAD II

(N1)

Fie ecuația

$ax^2+bx+c=0$

au loc $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ P=x_1x_2=\frac{c}{a} \end{cases}$

dem:

$S=x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Rightarrow S=\frac{-2b}{2a} \Rightarrow S=-\frac{b}{a}$

$P=x_1x_2=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=$

$=\frac{(-b)^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=$

$=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a} \Rightarrow P=\frac{c}{a}$

Ex1: $m=?$ dacă rad. ec.

$x^2-(2m+1)x+3m=0$

verifică: $x_1+x_2+x_1x_2=1$

$E_1)$ $x_1+x_2+x_1x_2=11 \Rightarrow S+P=\dots$

$E_2)$ $S=-\frac{b}{a}=\frac{2m+1}{1}=2m+1$

$P=\frac{c}{a}=\frac{3m}{1}=3m$

$E_3)$ $S+P=11 \Rightarrow 2m+1+3m=11$

$\Rightarrow 5m=10 \Rightarrow m=2$

Ex2: $m=?$ dacă $x_1-4x_2+x_1x_2=1$

pt ec $(m-2)x^2+x+m-1=0$

$E_1)$ $x_1-4x_2+x_1x_2=11 \Rightarrow$

$x_1+x_2+x_1x_2-5x_2=1$

$\Rightarrow S+P-5x_2=1$

$E_2)$ $S=-\frac{1}{m-2}$, $P=\frac{m-1}{m-2}$

$E_3)$ înlocuim $\Rightarrow$

$-\frac{1}{m-2}+\frac{m-1}{m-2}-5x_2=1 \Rightarrow$

$\frac{-1+m-1}{m-2}-5x_2=1 \Rightarrow 1-5x_2=1$

$\Rightarrow x_2=0$

$E_4)$ Dacă $x_2=0$ e rădăc $\Rightarrow$

$x_2=0$ verifică ec $\Rightarrow$

$0-(2m+1)\cdot 0+3m=0$

$\Rightarrow \boxed{m=0}$

DETERMINAREA RELAȚIEI INDEPENDENTE DE m ÎNTRE RĂDĂCINILE UNEI ECUAȚII DE GR II

(N2)

E_1) Scriem relațiile lui VIETE, $S=-\frac{b}{a}$, $P=\frac{c}{a}$

E_2) Scoatem pe m din cea mai simplă, înlocuim în cealaltă, apoi înlocuim $S=x_1+x_2$, $P=x_1 x_2$

Exp: Fie $f_m(x)=(m-2)x^2+(2m-1)x+m-5$, $m\neq 2$
Determinați relație independentă de m între rădăcinile ecuației $f_m(x)=0$

E_1) $S=-\frac{b}{a}=-\frac{2m-1}{m-2}=\frac{1-2m}{m-2}$.

$P=\frac{c}{a}=\frac{m-5}{m-2}$

E_2) Din $P=\frac{m-5}{m-2} \Leftrightarrow Pm-2P=m-5 \Leftrightarrow m(P-1)=2P-5$

$\Leftrightarrow m=\frac{2P-5}{P-1}$

Înlocuim în $S=\frac{1-2m}{m-2} \Rightarrow S=\frac{1-2\cdot\frac{2P-5}{P-1}}{\frac{2P-5}{P-1}-2} \Rightarrow$

$S=\frac{P-1-4P+10}{2P-5-2P+2} \Leftrightarrow S=\frac{9-3P}{-3} \Leftrightarrow -3S=9-3P \mid :3$

$\Leftrightarrow -S=3-P \Leftrightarrow S-P+3=0$

Dar, $S=x_1+x_2$, $P=x_1\cdot x_2 \Rightarrow$ relația este:

$x_1+x_2-x_1x_2+3=0$

DISCUȚIA NATURII ȘI SEMNULUI RĂDĂCINILOR ECUAȚIEI DE GRADUL II

(N3)

E_1) $\Delta = b^2 - 4ac$, tabel pt semne

E_2) $P = \frac{c}{a}$, tabel pt. semne

E_3) $S = -\frac{b}{a}$, tabel pt semne

E_4) Tabel de semne

m	
Δ	
P	
S	

E_5) Tabel de discuție

m	Δ	P	S	discuție
$m \in (-\infty; m_1)$				
$m = m_1$				
$m \in (m_1, m_2)$				
$m = m_2$				
- - -				

Obs 1: $\Delta > 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$

$\Delta = 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 = x_2$

$\Delta < 0 \Rightarrow x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$ și nu mai scriem nimic la discuție

Obs 2: $P > 0, S > 0 \Rightarrow x_1 > 0, x_2 > 0$

$P > 0, S < 0 \Rightarrow x_1 < 0, x_2 < 0$

$P < 0, S > 0 \Rightarrow x_1 < 0, x_2 > 0, |x_1| < |x_2|$

$P < 0, S < 0 \Rightarrow x_1 < 0, x_2 > 0, |x_1| > |x_2|$

$P < 0, S = 0 \Rightarrow x_1 < 0, x_2 > 0, x_1 = -x_2$

$P = 0, S < 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 < 0$

$P = 0, S > 0 \Rightarrow x_1 > 0, x_2 = 0$

$P = 0, S = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0$

Obs 3: Dacă la P sau la S obținem \, valoarea lui m corespunzătoare se înlocuiește în ecuație

---

Ex 1: $(m-1)x^2 + 2(m+1)x + m + 1 = 0$, discutați natura și semnul rad

E_1) $\Delta = 4(m+1)^2 - 4(m-1)(m+1) = 4m^2 + 8m + 4 - 4m^2 + 4$

$\Rightarrow \Delta = 8m + 8$

m		-1	
$8m+8$	- - - -	0	+ + +

E_2) $P = \frac{c}{a} = \frac{m+1}{m-1}$

m		-1		1	
$m+1$	- - -	0	+ + +		
$m-1$	- - - - -		- - -	0	+ + +
P	+ + +	0	- - -	\	+ + +

E_3) $S = -\frac{b}{a} = \frac{-2m-2}{m-1}$

m		-1		1	
$-2m-2$	+ + +	0	- - -		- - -
$m-1$	- - -		- - -	0	+ + +
S	- - -	0	+ + +	\	- - -

E_4)

m		-1		1	
Δ	- - - -	0	+ + +		+ + +
P	+ + +	0	- - -	\	+ + +
S	- - - -	0	+ + +	\	- - -

E_5)

m	Δ	P	S	Discuție
$m \in (-\infty; -1)$	-	+	-	$x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$
$m = -1$	0	0	0	$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 = x_2 = 0$
$m \in (-1; 1)$	+	-	+	$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $\|x_1\| < \|x_2\|$
$m = 1$	+	\	\	înlocuim $m = 1$ în ec $\Rightarrow 4x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$
$m \in (1; \infty)$	+	+	-	$x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, $x_1 < 0$, $x_2 < 0$

CONDIȚIA CA DOUĂ ECUAȚII DE GRAD II (N2) SĂ AIBĂ ACELEAȘI RĂDĂCINI, RESPECTIV SĂ AIBĂ O RĂDĂCINĂ COMUNĂ

Fie $ax^2+bx+c=0$

$a'x^2+b'x+c'=0$

Aceste ecuații au:

1) <u>același rădăcini</u> $\Leftrightarrow \frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

2) <u>cel puțin o rădăcină comună</u>

$(ac'-a'c)^2=(ab'-a'b)(bc'-b'c)$

3) <u>exact o rădăcină reală comună</u>

$(ac'-a'c)^2=(ab'-a'b)(bc'-b'c)$ și să nu fie adevărată $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$

<u>Exp1</u>: $a,b=?$ dacă ecuațiile: $2x^2+3x+5=0$ au aceleași rădăcini $4x^2+bx+a-1=0$

$\frac{2}{4}=\frac{3}{b}=\frac{5}{a-1}$

$\frac{2}{4}=\frac{3}{b}\Rightarrow 2b=12\Rightarrow \boxed{b=6}$

$\frac{2}{4}=\frac{5}{a-1}\Rightarrow 2a-2=20\Rightarrow \boxed{a=11}$

<u>Exp2</u>: $m=?$ dacă ecuațiile $x^2-3x+m=0$ și $3x^2+(m-3)x-2=0$ au cel puțin o rădăcină comună

$(ac'-a'c)^2=(ab'-a'b)(bc'-c'b)\Leftrightarrow$

$(-2-3m)^2=(m-3+9)(6-m(m-3))$

$4+12m+9m^2=(m+6)(6-m^2+3m)$

$4+12m+9m^2=6m-m^3+3m^2+36-6m^2+18m$

$4+12m+9m^2=-m^3-3m^2+24m+36$

$m^3+12m^2-12m-32=0$

	m^3	m^2	m	m^0
	1	12	−12	−32
1	1	13	1	−31≠0
2	1	14	16	0

$\Rightarrow (m-2)(1\cdot m^2+14m+16)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} m=2 \\ \text{sau} \\ m^2+14m+16=0, \end{cases}$

$m_{2,3}=\frac{-14\pm\sqrt{196-64}}{2\cdot 1}=\frac{14\pm\sqrt{132}}{2}=\frac{14\pm 2\sqrt{33}}{2}$

$=7\pm\sqrt{33}$

<u>Exp3</u>: $m=?$ dacă ecuațiile $x^2-3x+m=0$ și $3x^2+(m-3)x-2=0$ au exact o rădăcină comună

(*) $(ac'-a'c)^2=(ab'-a'b)(bc'-c'b)$ și

(1) $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$ nu e adevărată

Condiția (1) e adevărată pentru $m\in\{2;\ 7\pm\sqrt{33}\}$ și ar trebui să nu fie adevărată $\frac{1}{1}=\frac{-3}{m-3}=\frac{m}{-2}$

Această relație, dacă ar fi adev ar rezulta $m-3=-3\Rightarrow m=0$ și $-2=m\Rightarrow m=-2$

$\Rightarrow \nexists m$ pt ca ea să fie adev $\Rightarrow$ pt ca ec să aibe exact o rad comună trebuie ca $m\in\{2;\ 7\pm\sqrt{33}\}$

ECUAȚIE ATAȘATĂ RĂDĂCINILOR, DETERM. EC y DACĂ ȘTIM EC ÎN x ȘI RELAȚIE ÎNTRE RĂDĂCINI

(N2)

Dacă știm x_1, x_2, găsim $S = x_1 + x_2$, $P = x_1 x_2 \Rightarrow$ ec. atașată rădăc este

$$\boxed{X^2 - SX + P = 0}$$

Dacă știm ec în x și relație între y_1 și (x_1, x_2) respectiv între y_2 și (x_1, x_2), pt a găsi ec în y sunt 2 metode

met I; ec în y: $y^2 - S_y \cdot y + P_y = 0$

$S_y = y_1 + y_2$ și scriem în funcție de S_x, P_x

$P_y = y_1 \cdot y_2$ și scriem în funcție de S_x, P_x

Găsim S_x, P_x din ec în x cu VIETE

met II: găsim o relație doar între y_1 și x_1, respectiv doar între y_2 și x_2 $\Rightarrow$ relație generală între y și x, găsim pe x în funcție de y și înlocuim în ec. inițială

Exp 1: găsiți ec de gr II care are ca rădăcini pe $x_1 = 1$ și pe $x_2 = 3$

$E_1)$ $S = x_1 + x_2 = 1 + 3 = 4$

$P = x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot 3 = 3$

$E_2)$ ec este: $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{x^2 - 4x + 3 = 0}$$

Exp 2: Fie x_1, x_2 rād pt $2x^2 + 5x + 9 = 0$, se cere ec în y dacă $y_1 = 2x_1 + x_2$, $y_2 = x_1 + 2x_2$

$E_1)$ ec în y: $y^2 - S_y \cdot y + P_y = 0$

$E_2)$ $S_y = y_1 + y_2 = 3(x_1 + x_2) = 3S_x$

$P_y = y_1 y_2 = (2x_1 + x_2)(x_1 + 2x_2) =$

$= 2x_1^2 + 5x_1 x_2 + 2x_2^2 = 2(S_x^2 - 2P_x) + 5P_x$

$E_3)$ $S_x = -\frac{b}{a} = -\frac{5}{2}$; $P_x = \frac{c}{a} = \frac{9}{2}$

$E_4)$ $S_y = 3 \cdot (-\frac{5}{2}) = -\frac{15}{2}$

$P_y = 2(\frac{25}{4} - 2 \cdot \frac{9}{2}) + 5 \cdot \frac{9}{2} = \frac{25}{2} - 18 + \frac{45}{2} = 17$

$E_5)$ ec: $\boxed{y^2 + \frac{15}{2} y + 17 = 0}$

Exp 3: $2x^2 + 4x - 10 = 0$ cu x_1, x_2 rād, să se afle ec în y cu $y_1 = \frac{1}{2x_1 + x_2}$, $y_2 = \frac{1}{x_1 + 2x_2}$

Este foarte greu a calcula $S_y = y_1 + y_2$ în funcție de S_x și de P_x

Cum $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -2 \Rightarrow x_2 = -2 - x_1$

$y_1 = \frac{1}{2x_1 - 2 - x_1} \Leftrightarrow y_1 = \frac{1}{x_1 - 2} \Rightarrow x_1 - 2 = \frac{1}{y_1}$

$\Rightarrow x_1 = 2 + \frac{1}{y_1}$, analog $x_2 = 2 + \frac{1}{y_2} \Rightarrow$

în caz general, $x = 2 + \frac{1}{y}$ și înlocuind în ec: $2x^2 + 5x + 9 = 0$ avem

$2(2 + \frac{1}{y})^2 + 5(2 + \frac{1}{y}) + 9 = 0 \Leftrightarrow$

$2(4 + \frac{4}{y} + \frac{1}{y^2}) + 10 + \frac{5}{y} + 9 = 0$

$8 + \frac{8}{y} + \frac{2}{y^2} + 19 + \frac{5}{y} = 0 \mid \cdot y^2$

$$\boxed{27y^2 + 13y + 2 = 0}$$

DESCOMPUNEREA POLINOMULUI DE GRAD II ÎN FACTORI

$ax^2+bx+c \xrightarrow{\Delta>0} a(x-x_1)(x-x_2)$

$ax^2+bx+c \xrightarrow{\Delta=0} a(x-x_1)^2$

$ax^2+bx+c \xrightarrow{\Delta<0}$ ireductibil (nu se poate descompune) în $\mathbb{R}$

Exp 1: descompuneți $f=3x^2-2x-1$

$E_1)\ 3x^2-2x-1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2\cdot 3}=\frac{2\pm 4}{6}\begin{matrix}-\frac{1}{3}\\ 1\end{matrix}$

$E_2)\ f=3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1) \Rightarrow f=(3x+1)(x-1)$

Exp 2: descompuneți $f=-4x^2+4x-1$

$E_1)\ -4x^2+4x-1=0 \mid\cdot(-1) \Rightarrow 4x^2-4x+1=0$

$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2\cdot 4}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

$E_2)\ \Delta=0 \Rightarrow f=-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$

Exp 3: descompuneți $f=x^2+3x+4$

$E_1)\ x^2+3x+4=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-16}}{2}$ și $\Delta=-7<0$

$\Rightarrow f$ ireductibil

SUMA PUTERILOR ASEMENEA (N1)

PENTRU EC. DE GR II

(FĂRĂ A REZOLVA EC)

Dt $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow$ $\boxed{x_1^2+x_2^2=S^2-2P}$

$\boxed{x_1^3+x_2^3=S^3-3PS}$

Cu (*) (adică de nivel 1) apar și

$\boxed{x_1^4+x_2^4=(S^2-2P)^2-2P^2}$ și

$\boxed{|x_1-x_2|=\sqrt{S^2-4P}}$

Ex.: Dt $x^2-3x+1=0$, se cere

a) $x_1^2+x_2^2$ b) $x_1^3+x_2^3$ c) $x_1^4+x_2^4$ d) $|x_1-x_2|$

E1) $S=-\frac{b}{a}=3$, $P=\frac{c}{a}=1$

E2) a) $x_1^2+x_2^2=S^2-2P=9-2=7$

b) $x_1^3+x_2^3=S^3-3PS=27-3\cdot3\cdot1=27-9=18$

c) $x_1^4+x_2^4=(S^2-2P)^2-2P^2=(9-2)^2-2\cdot1=49-2=47$

d) $|x_1-x_2|=\sqrt{S^2-4P}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$

Obs.: dacă nu se reține, formulele se demonstrează:

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=S^2-2P$

$x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)=S^3-3PS$

$x_1^4+x_2^4=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=(S^2-2P)^2-2P^2$

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{x_1^2-2x_1x_2+x_2^2}=\sqrt{S^2-2P-2P}=\sqrt{S^2-4P}$

CALCULAREA EXPRESIILOR SIMETRICE ÎN CELE DOUĂ RĂDĂCINI ALE UNEI EC. DE GRADUL II

(N13)

E_1) x_1 rădăcină $\Rightarrow x_1$ verifică ec $\Rightarrow x_1^2 = \ldots$ în fct de x_1. Dacă se cer puteri mai mari decât 2 pt x_1, se înmulțește relația de mai sus cu x_1, obținem x_1^3 în fct de x_1. Dacă e nevoie de x_1^4, înmulțim relația cu $x_1^3 = \ldots$ cu x_1 etc.
Analog obținem pentru x_2 și relațiile obținute pentru x_1 trebuie să fie identice cu cele pentru x_2
E_2) Se obține o expresie cu x_1 și x_2, se aduce la același numitor, se folosește apoi VIETE

Ex1.: Dacă x_1, x_2 rădăcinile ecuației $2x^2 + x - 3 = 0$, calculați valoarea lui $E(x) = \frac{x_1^3 + 2x_1 - 5}{x_1^2 + 3} + \frac{x_2^3 + 2x_2 - 5}{x_2^2 + 3}$

E_1) x_1 rad $\Rightarrow 2x_1^2 + x_1 - 3 = 0 \Rightarrow$
$2x_1^2 = -x_1 + 3 \Rightarrow \boxed{x_1^2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}}$

E_2) $x_1^2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2} \mid \cdot x_1 \Rightarrow$
$x_1^3 = -\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{3}{2}x_1$ și înlocuim
$x_1^2 = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2} \Rightarrow$
$x_1^3 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}x_1$
$\Rightarrow x_1^3 = \frac{1}{4}x_1 - \frac{3}{4} + \frac{3}{2}x_1$
$\boxed{x_1^3 = \frac{7}{4}x_1 - \frac{3}{4}}$,

E_3) Analog, $x_2^2 = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}$ și
$x_2^3 = \frac{7}{4}x_2 - \frac{3}{4}$

E_4) Înlocuim în expresie $\Rightarrow$

$$E(x) = \frac{-\frac{7}{4}x_1 - \frac{3}{4} + 2x_1 - 5}{-\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2} + 3} + \frac{-\frac{7}{4}x_2 - \frac{3}{4} + 2x_2 - 5}{-\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2} + 3}$$

$$E(x) = \frac{\frac{1}{4}x_1 - \frac{23}{4}}{-\frac{1}{2}x_1 + \frac{9}{2}} + \frac{\frac{1}{4}x_2 - \frac{23}{4}}{-\frac{1}{2}x_2 + \frac{9}{2}}$$

$$E(x) = \frac{x_1 - 23}{4} \cdot \frac{2}{-x_1 + 9} + \frac{x_2 - 23}{4} \cdot \frac{2}{-x_2 + 9}$$

$$E(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1 - 23}{-x_1 + 9} + \frac{x_2 - 23}{-x_2 + 9}\right)$$

E_5) $E(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_1 - 23)(-x_2 + 9) + (x_2 - 23)(-x_1 + 9)}{(-x_1 + 9)(-x_2 + 9)}$

$$E(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-x_1x_2 + 9x_1 + 23x_2 - 207 - x_1x_2 + 9x_2 + 23x_1 - 207}{x_1x_2 - 9x_1 - 9x_2 + 81}$$

$$E(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x_1x_2 + 32(x_1 + x_2) - 414}{x_1x_2 - 9(x_1 + x_2) + 81}$$

E_6) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{1}{2}$, $x_1x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{3}{2}$

$$E(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) + 32 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 414}{-\frac{3}{2} - 9 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 81}$$

$$E(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{6 - 16 - 414}{3 + 81} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-424}{84} = -\frac{106}{42} = -\frac{53}{21}$$

SISTEME SIMETRICE ȘI SISTEME OMOGENE (N3)

-ec simetrică: schimbând x cu y ecuația rămâne aceeași

Exp.: $2x^3-5xy+2y^3=8$ e simetrică

$2x^3-2xy=7$ nu e simetrică

-sist simetric: ambele ecuații sunt simetrice

-rezolvare: E_1) scriem ec în fct. de S și P, rezolvăm sistemul și obținem valorile lui S și P

E_2) folosim ec. atașată: $t^2-St+P=0$ și sol. sistemului sunt

$\begin{cases} x=t_1 \\ y=t_2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x=t_2 \\ y=t_1 \end{cases}$

Exp 1: $\begin{cases} 3x^2-10xy+3y^2=0 \\ 3(x+y)=2xy \end{cases}$

E_1) $x^2+y^2=S^2-2P$, $xy=P$, $x+y=S$

$\Rightarrow \begin{cases} 3(S^2-2P)-10P=0 \\ 3S=2P \Rightarrow P=\frac{3S}{2} \end{cases}$

E_2) înlocuim în $3(S^2-2P)-10P=0$

$\Rightarrow 3(S^2-3S)-15S=0 \Rightarrow$

$3S^2-24S=0 \Rightarrow 3S(S-8)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} S_1=0 \text{ și } P=\frac{3S}{2} \Rightarrow P_1=0 \\ \text{sau} \\ S_2=8 \text{ și } P=\frac{3S}{2} \Rightarrow P_2=12 \end{cases}$

E_3) Caz I: $S_1=0, P_1=0 \Rightarrow$ ec. atașată

$t^2-St+P=0 \Rightarrow t^2=0 \Rightarrow t_1=t_2=0$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \\ y_1=0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x_2=0 \\ y_2=0 \end{cases}$ aceeași soluție

E_4) Caz II $S_2=8, P_2=12 \Rightarrow$ ec. atașată

$t^2-St+P=0 \Rightarrow t^2-8t+12=0$

$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2\cdot 1}=\frac{8\pm 4}{2} \begin{cases} t_1=6 \\ t_2=2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1=6 \\ y_1=2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x_1=2 \\ y_2=6 \end{cases}$

E_4) Sol finală $(x,y)\in\{(0;0);(6;2);(2;6)\}$

-ec. omogenă: fiecare termen, considerat în ambele necunoscute are același grad

-sist omogen: ambele ec. sunt omogene, se cer doar cele de grad II

-rezolvare: E_1) not. $y=tx$, înlocuim în ambele ecuații

E_2) împărțim ecuațiile, se simplifică $x^2 \Rightarrow$ ecuație cu necunoscuta t, se rezolvă $\Rightarrow t_1, t_2$

E_3) înlocuim t_1 într-o ecuație de forma $x^2(\dots)=\dots \Rightarrow x^2=\dots$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\dots \\ x_2=\dots \end{cases}$

E_4) pt $x_1=\dots$, folosim $y=tx_1 \Rightarrow y_1=\dots$, analog celelalte

---

Exp 1: $\begin{cases} 3x^2-2xy=160 \\ x^2-3xy-2y^2=8 \end{cases}$

E_1) not $y=tx \Rightarrow \begin{cases} 3x^2-2tx^2=160 \\ x^2-3tx^2-2t^2x^2=8 \end{cases}$

E_2) împărțim $\Rightarrow \frac{x^2(3-2t)}{x^2(1-3t-2t^2)}=\frac{160}{8}$

$\Rightarrow \frac{3-2t}{1-3t-2t^2}=20 \Rightarrow 3-2t=20-60t-40t^2$

$\Rightarrow 40t^2+58t-17=0, t_{1,2}=\frac{-58\pm\sqrt{3364+2720}}{2\cdot 40}$

$\Rightarrow t_{1,2}=\frac{-58\pm 78}{80} \begin{cases} \frac{1}{4} \\ -\frac{17}{10} \end{cases}$

E_3) Caz I: $t_1=\frac{1}{4}$ și $x^2(3-2t)=160$

$\Rightarrow x^2\left(3-\frac{1}{2}\right)=160 \Leftrightarrow x^2\cdot\frac{5}{2}=160 \Rightarrow x^2=64$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-8, y_1=t_1x_1 \Rightarrow y_1=\frac{1}{4}\cdot(-8)=-2 \\ x_2=8, y_2=t_1x_2 \Rightarrow y_2=\frac{1}{4}\cdot 8=2 \end{cases}$

Caz II: $t_2=-\frac{17}{10} \Rightarrow x^2\left(3+\frac{17}{5}\right)=160 \Rightarrow$

$x^2\cdot\frac{32}{5}=160 \Rightarrow x^2=\frac{160\cdot 5}{32_2}=\frac{50}{2}=25$

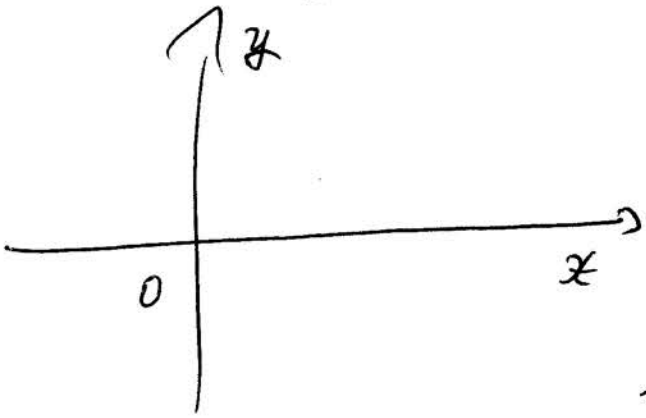
$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-5, y_1=t_2x_1=-\frac{17}{10}\cdot(-5)=\frac{17}{2} \\ x_2=5, y_2=t_2x_2=-\frac{17}{10}\cdot 5=-\frac{17}{2} \end{cases}$

E_4)

$(x,y)\in\{(-8;-2);(8;2);(-5;\frac{17}{2});(5;-\frac{17}{2})\}$

SISTEMUL DE AXE CARTEZIAN, SEMNELE CASANELOR

(N1)

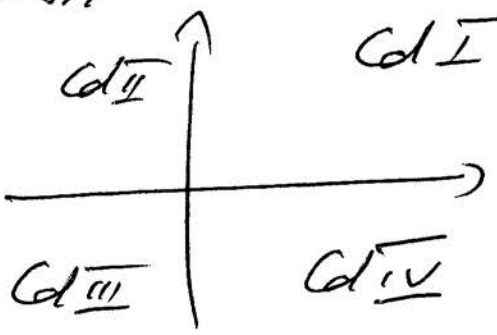


1) Ox este axa absciselor
Oy este axa ordonatelor

2) Dacă $M(x_M, y_M) \Rightarrow$
abscisa lui M este x_M,
ordonata lui M este y_M

3) Dacă $M(x_M, y_M) \in Oy \Rightarrow x_M = 0$
Dacă $M(x_M, y_M) \in Ox \Rightarrow y_M = 0$

4) Există 4 cadrane



5) $M(x_M, y_M) \in Cd\,I \Leftrightarrow \begin{cases} x_M > 0 \\ y_M > 0 \end{cases}$

$M(x_M, y_M) \in Cd\,II \Leftrightarrow \begin{cases} x_M < 0 \\ y_M > 0 \end{cases}$

$M(x_M, y_M) \in Cd\,III \Leftrightarrow \begin{cases} x_M < 0 \\ y_M < 0 \end{cases}$

$M(x_M, y_M) \in Cd\,IV \Leftrightarrow \begin{cases} x_M > 0 \\ y_M < 0 \end{cases}$

PRODUSUL CARTEZIAN A DOUĂ MULȚIMI

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y \in B\}$$

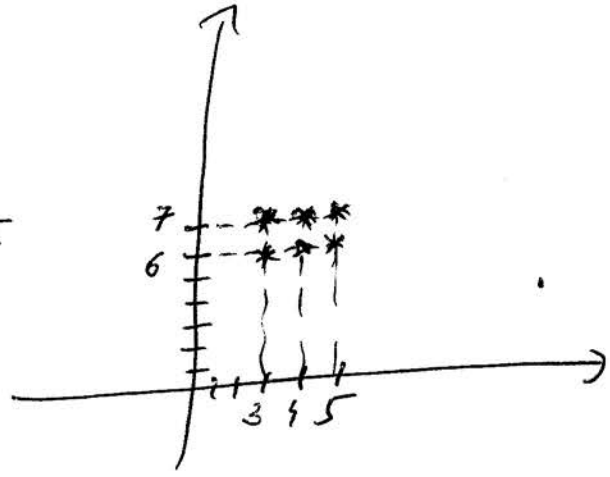
Exp: $A = \{3; 4; 5\}$, $B = \{6; 7\}$

$\Rightarrow A \times B = \{(3;6); (3;7); (4;6); (4;7); (5;6); (5;7)\}$

Obs: reprezentarea grafică a produsului cartezian a 2 mulțimi este formată din punctele care nu se unesc

Exp.: Pt ce avem mai sus,

$A \times B$ are reprezentarea grafică



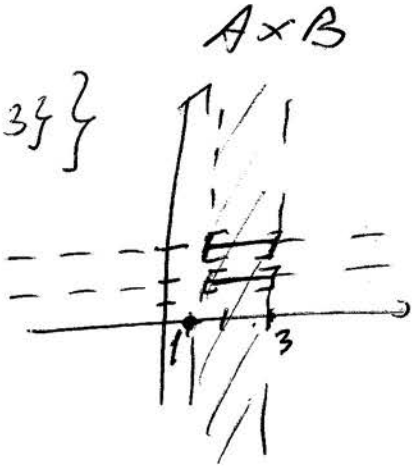
Obs 2: $\text{card}(A \times B) = \text{card}A \cdot \text{card}B$

Exp: în exemplul nostru,

$\text{card}A = 3$, $\text{card}B = 2$ și $\text{card}(A \times B) = 6$

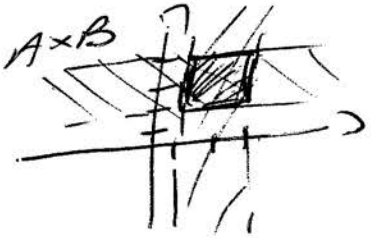
Exp 2: $A = [1; 3]$, $B = \{2; 3\}$

$\Rightarrow A \times B = \{(x, y) \mid x \in [1; 3] \text{ și } y \in \{2; 3\}\}$



Exp 3: $A = [1; 3]$, $B = [2; 4]$

$A \times B = \{(x, y) \mid x \in [1; 3], y \in [2; 4]\}$



FUNCȚII PERIODICE

f este funcție periodică dacă $\exists T \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in D_f$ să avem $f(x+T)=f(x)$

Obs.: cea mai mică perioadă strict pozitivă se numește perioadă principală și se notează T_0

Exp 1: Arătați că $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(-1)^x$ este o funcție periodică, determinați perioada principală

E_1) ar trebui să $\exists T \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in \mathbb{N}$ să avem

$f(x+T)=f(x)$

E_2) din $f(x+T)=f(x) \Rightarrow (-1)^{x+T}=(-1)^x \Rightarrow$

$(-1)^x \cdot (-1)^T = (-1)^x \Rightarrow (-1)^T = 1$

E_3) e clar că pentru orice T număr par avem $(-1)^T=1$, iar perioada principală este $T_0=2$

Exp 2: Fie $f(x)=\{7x\}$, arătați că f este periodică de perioadă $T=\frac{1}{7}$

E_1) ar trebui ca pentru $T=\frac{1}{7}$ și $\forall x \in \mathbb{R}$ să avem

$f(x+T)=f(x)$

E_2) $f(x+T)=f(x) \Leftrightarrow f(x+\frac{1}{7})=f(x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{7(x+\frac{1}{7})\}=\{7x\} \Leftrightarrow \{7x+1\}=\{7x\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7x+1-[7x+1]=7x-[7x]$

$\Leftrightarrow 1-[7x]-1=-[7x]$ adev $\Rightarrow f$ periodică de perioadă $T=\frac{1}{7}$

FUNCȚII PARE, FUNCȚII IMPARE

$f: A \to B$ este funcție pară $\Leftrightarrow \begin{cases} D_f \text{ simetric} \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

$f: A \to B$ este funcție impară $\Leftrightarrow \begin{cases} D_f \text{ simetric} \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

D_f simetric $\Leftrightarrow (\forall x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f)$, adică punctele din el sunt situate la fel față de zero

Exp 1: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$, studiați paritatea

E1) $D_f = \mathbb{R}$, mulțime simetrică

E2) $f(-x) = (-x)^2 + 3 \Rightarrow f(-x) = x^2 + 3$, $f(x) = x^2 + 3$ $\Rightarrow f(-x) = f(x)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ funcție pară

Exp 2: $f: (0; \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3$, studiați paritatea

E1) $D_f = (0; \infty)$ care nu e mț simetrică $\Rightarrow f$ nu e pară, nici impară

Exp 3: $f: (-1; 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$, studiați paritatea

E1) $D_f = (-1; 1)$ mț simetrică

E2) $f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x$, $-f(x) = -x^3 - x$ $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ impară

Obs: f fct pară $\Leftrightarrow G_f$ simetric față de Oy

[illegible] impară $\Leftrightarrow G_f$ simetric față de O

EXPLICITAREA FUNCȚIILOR DATE PRIN MIN sau MAX (N2)

E_1) $f(x) = MIN(f_1, f_2, \dots)$ sau $f(x) = MAX(f_1, f_2, \dots)$

E_2) se egalează pe rând 2 câte 2 dintre f_i

din interior, se găsesc soluțiile $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$

E_3) se face tabel

x	α_1	α_2	α_3
f_1			
f_2			
- - - -			
MIN			

E_4) se dau valori lui x pe fiecare interval determinat de soluții și la MIN se scrie funcția care dă rezultatul cel mai mic, apoi scriem f cu acolade

---

Ex: $f(x) = MIN(1; x; x^2; x^3)$

E_1) $1 = x \Rightarrow x = 1$; $\quad 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

$1 = x^3 \mid \sqrt[3]{\ } \Rightarrow x = 1$; $\quad x = x^2 \Rightarrow x(x-1) = 0 \leftarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = 1 \end{matrix}$

$x = x^3 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \leftarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{matrix}$ $\quad x^2 = x^3 \Rightarrow x^2(x-1) = 0 \leftarrow \begin{matrix} x = 0 \\ x = 1 \end{matrix}$

E_2)

x	-2	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	2
1	1	1	1	1	1	1	1
x	-2	-1	$-1/2$	0	$1/2$	1	2
x^2	4	1	$1/4$	0	$1/4$	1	4
x^3	-8	-1	$-1/8$	0	$1/8$	1	8
MIN	x^3		x		x^3		1

E_3) $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in (-\infty; -1] \\ x, & x \in (-1; 0] \\ \dots & \dots \in (0; 1] \end{cases}$

COMPUNERE DE FUNCȚII CU ACOLADĂ (N3)

E_1) Fie $f(x)=\begin{cases} f_1(x), & x\in I_1 \\ f_2(x), & x\in I_2 \end{cases}$

$g(x)=\begin{cases} g_1(x), & x\in J_1 \\ g_2(x), & x\in J_2 \end{cases}$

(este un exemplu dat pentru două ramuri, însă metoda este generală, adică putem calcula $f\circ g$ și pentru f funcție fără ramuri, g funcție cu două ramuri
sau
f funcție cu 1 ramură, g cu 3 ramuri
sau
f cu 2 ramuri, g cu 3 ramuri de

E_2)
$$(f\circ g)(x)=\begin{cases} f_1(g_1(x)), & x\in J_1 \text{ și } g_1(x)\in I_1 \\ f_2(g_1(x)), & x\in J_1 \text{ și } g_1(x)\in I_2 \\ f_1(g_2(x)), & x\in J_2 \text{ și } g_2(x)\in I_1 \\ f_2(g_2(x)), & x\in J_2 \text{ și } g_2(x)\in I_2 \end{cases}$$

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases} g_1(f_1(x)), & x\in I_1 \text{ și } f_1(x)\in J_1 \\ g_2(f_1(x)), & x\in I_1 \text{ și } f_1(x)\in J_2 \\ g_1(f_2(x)), & x\in I_2 \text{ și } f_2(x)\in J_1 \\ g_2(f_2(x)), & x\in I_2 \text{ și } f_2(x)\in J_2 \end{cases}$$

E_3) se rezolvă $x\in J_1$, $g_1(x)\in I_1$ și se intersectează intervalele, iar ramurile finale se scriu în ordinea în care x parcurge $\mathbb{R}$ (adică $(-\infty,\alpha)$, $[\alpha,\beta)$, ...)

Exp 1: $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x<5 \\ x+3, & x\geq 5 \end{cases}$, $g(x)=\begin{cases} -x+4, & x<1 \\ 3x-1, & x\geq 1 \end{cases}$

Se cere $f\circ g$

E_1)
$$(f\circ g)(x)=\begin{cases} 2(-x+4)+1, & x<1 \text{ și } -x+4<5 \\ (-x+4)+3, & x<1 \text{ și } -x+4\geq 5 \\ 2(3x-1)+1, & x\geq 1 \text{ și } 3x-1<5 \\ (3x-1)+3, & x\geq 1 \text{ și } 3x-1\geq 5 \end{cases}$$

E_2)
$$(f\circ g)(x)=\begin{cases} -2x+9, & x<1 \text{ și } x>-1 \\ -x+7, & x<1 \text{ și } x\leq -1 \\ 6x-1, & x\geq 1 \text{ și } x<2 \\ 3x+2, & x\geq 1 \text{ și } x\geq 2 \end{cases}$$

E_3)
$$(f\circ g)(x)=\begin{cases} -2x+9, & x\in(-1;1) \\ -x+7, & x\in(-\infty;-1] \\ 6x-1, & x\in[1;2) \\ 3x+2, & x\in[2;\infty) \end{cases}$$

E_4)
$$(f\circ g)(x)=\begin{cases} -x+7, & x\in(-\infty;-1] \\ -2x+9, & x\in(-1;1) \\ 6x-1, & x\in[1;2) \\ 3x+2, & x\in[2;\infty) \end{cases}$$

Exp 2: $f(x)=3x-1$, $g(x)=\begin{cases} -2x+3, & x\leq 2 \\ 4x-1, & x>2 \end{cases}$

Se cere $f\circ g$ și $g\circ f$

E_1)
$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases} 3(-2x+3)-1, & x\leq 2 \\ 3(4x-1)-1, & x>2 \end{cases}$$
$$=\begin{cases} -6x+8, & x\leq 2 \\ 12x-4, & x>2 \end{cases}$$

E_2)
$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases} -2(3x-1)+3, & 3x-1\leq 2 \\ 4(3x-1)-1, & 3x-1>2 \end{cases}$$
$$=\begin{cases} -6x+5, & x\leq 1 \\ 12x-5, & x>1 \end{cases}$$

Exp 3: $f(x)=3x+7$, $g(x)=-5x+1$

Se cere $f\circ g$ și $g\circ f$

E_1) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=3(-5x+1)+7=$
$=-15x+10$

E_2) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=-5(3x+7)+1=$
$=-15x-34$

MONOTONIA FUNCȚIILOR

(N3)

E_1) se calculează raport de variație $R(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ și se compară cu 0

E_2) dacă $R(x_1, x_2) < 0 \Rightarrow f$ ↘

dacă $R(x_1, x_2) > 0 \Rightarrow f$ ↗

dacă $R(x_1, x_2) \leq 0 \Rightarrow f$ ↘

dacă $R(x_1, x_2) \geq 0 \Rightarrow f$ ↗

Obs.: dacă f_s ↗ $\Rightarrow f$ ↗, reciproc NU

dacă f_s ↘ $\Rightarrow f$ ↘, reciproc NU

Obs 2: f_s ↗ dacă atunci când cresc valorile lui x, cresc și valorile lui $f(x)$ și

f_s ↘ dacă atunci când cresc valorile lui x, scad valorile lui $f(x)$

Obs 2: există și metoda cu $\forall x_1 < x_2$, calculăm $f(x_1) - f(x_2)$ și îl comparăm cu 0, deci dacă

$f(x_1) - f(x_2) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f_s$ ↗

$f(x_1) - f(x_2) > 0 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f_s$ ↘

$f(x_1) - f(x_2) \leq 0 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow f$ ↗

$f(x_1) - f(x_2) \geq 0 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \Rightarrow f$ ↘

Obs 3: mon. ale monotoniei:

a) f_s ↗, g_s ↗ $\Rightarrow (f+g)_s$ ↗

b) f_s ↘, g_s ↘ $\Rightarrow (f+g)_s$ ↘

c) f_s ↗, $\alpha > 0 \Rightarrow (\alpha f)_s$ ↗

d) f_s ↗ și pozitivă $\Rightarrow \frac{1}{f}$ ↘ și pozitivă

e) f_s ↗ $\Rightarrow -f_s$ ↘

f) f_s ↗ $\Rightarrow (\alpha + f)_s$ ↗, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

și alte proprietăți analoage

Ex.: Fie $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 3x - 1$

Se cere monotonia lui f

E_1) $\forall x_1, x_2 \in (0, \infty)$ cu $x_1 \neq x_2$, calculăm

$$R(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{x_2^2 + 3x_2 - 1 - (x_1^2 + 3x_1 - 1)}{x_2 - x_1} =$$

$$= \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + 3(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 3)}{x_2 - x_1} =$$

$$= x_2 + x_1 + 3$$

E_2) Dar $x_1, x_2 \in (0, \infty) \Rightarrow x_2 + x_1 + 3 > 0$

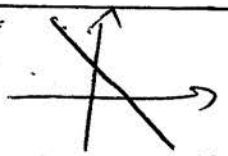
$\Rightarrow R(x_1, x_2) > 0 \Rightarrow f_s$ ↗ pe $(0, \infty)$

GRAFICUL, MONOTONIA FUNCȚIEI DE GRADUL I

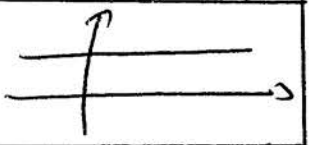
1) f are forma $f(x)=ax+b$

2) graficul funcției este o dreaptă și are forma

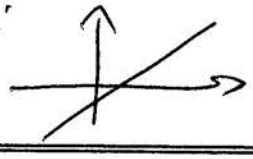
dacă $a<0$ atunci $\Rightarrow f\searrow$



dacă $a=0$ atunci $\Rightarrow f$ constantă



dacă $a>0$ atunci $\Rightarrow f\nearrow$



3) graficul se trasează calculând punctele de $\cap$ cu axele:

$\cap Oy: x=0 \Rightarrow f(0)=\ldots \Rightarrow A(0,\ldots)\in G_f$

$\cap Ox: y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow x_{1,2} \Rightarrow B\ldots \in G_f$

Obs 1: pt trasarea graficului se pot lua orice alte două puncte, apoi se unesc

Obs 2: dacă D_f e interval $\neq \mathbb{R}$ $\Rightarrow G_f$ semidreaptă sau segment de dreaptă

Ex 1: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-6$

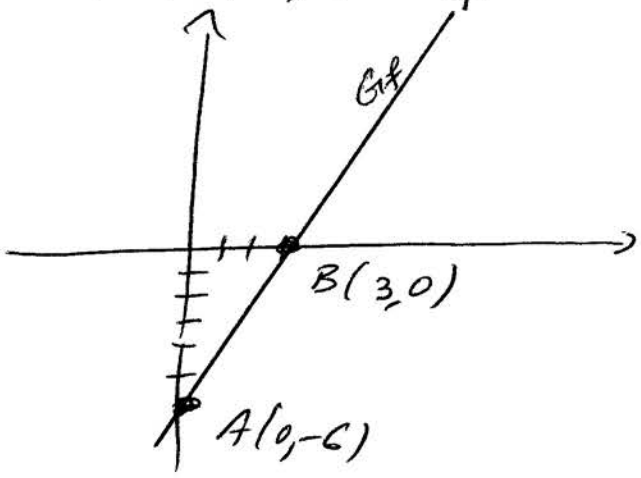
Se cere G_f

E_1) $\cap Oy: x=0 \Rightarrow f(0)=-6 \Rightarrow A(0,-6)\in G_f$

$\cap Ox: y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow 2x-6=0$

$\Rightarrow x=3 \Rightarrow B(3,0)\in G_f$

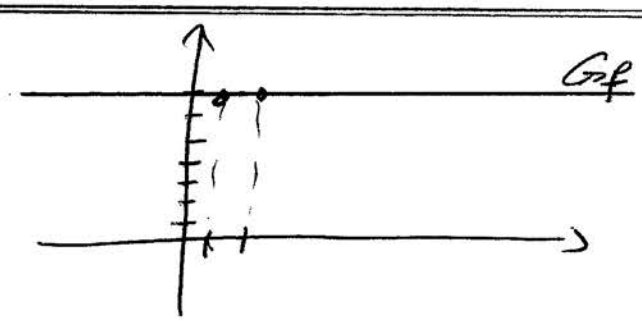
E_2)



Ex 2: $f(x)=7$, se cere G_f

$x=1 \Rightarrow f(1)=7 \Rightarrow A(1,7)\in G_f$

$x=2 \Rightarrow f(2)=7 \Rightarrow B(2,7)\in G_f$



Ex 3: $m=?$, $m\in\mathbb{R}$ dacă $f\nearrow$ unde $f(x)=(m-3)x+m-4$

E_1) $f(x)=ax+b$ e $\nearrow \Rightarrow a>0$

E_2) $m-3>0 \Rightarrow m\in(3,\infty)$

Ex 4: $m=?$ dacă $f(x)=(m-2)x+m-4$ e constantă

E) $f(x)=ax+b$ constantă $\Leftrightarrow a=0$

E_1) În cazul nostru.

$m-2=0 \Rightarrow m=2$

VÂRFUL FUNCȚIEI DE GR II. MAXIMUL SAU MINIMUL FCȚ DE GR II

Pt $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0$
$\Rightarrow \exists$ vârf $V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$ și
dacă $a>0 \Rightarrow G_f \cup$
dacă $a<0 \Rightarrow G_f \cap$

Pt $a>0 \Rightarrow G_f \cup \Rightarrow f$ are MINIM egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$, se obț. pt $x=-\frac{b}{2a}$

Pt $a<0 \Rightarrow G_f \cap \Rightarrow f$ are MAXIM egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$, se obț pt $x=-\frac{b}{2a}$

Ex 1.: $m=?$ dacă vârful parabolei $f(x)=x^2-mx+9$ este în Cd IV

$E_1) V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \in$ Cd IV
$\Rightarrow \begin{cases} x_V>0 \\ y_V<0 \end{cases}$

$E_2) x_V>0 \Rightarrow -\frac{b}{2a}>0 \Rightarrow \frac{m}{2}>0$
$\Rightarrow m\in(0;\infty)=I_1$

$E_3) y_V<0 \Rightarrow -\frac{\Delta}{4a}<0 \Rightarrow$
$-\frac{m^2-36}{4}<0 \Rightarrow m^2-36>0$
tabel $\Rightarrow m\in(-\infty;-6)\cup(6;\infty)=I_2$

$E_4) m\in I_1\cap I_2 \Rightarrow$
$m\in(6;\infty)$

Ex 2: $m=?$ dacă f_m are un maxim egal cu 5 unde $f_m(x)=(m+1)x^2-x+4$

$E_1)$ f are maxim egal cu $5 \Leftrightarrow$
$\begin{cases} a<0 \Rightarrow m+1<0 \Rightarrow m\in(-\infty;-1) \\ -\frac{\Delta}{4a}=5 \Rightarrow -\frac{1-16(m+1)}{4(m+1)}=5 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -1+16m+16=20m+20$
$\Leftrightarrow 4m=-5 \Rightarrow m=-\frac{5}{4}\in(-\infty;-1)$
$\Rightarrow \boxed{m=-\frac{5}{4}}$ e ok.

Ex 3: $m=?$ dacă f_m are un minim egal cu 2 pt $f_m(x)=mx^2+x-1$

$E_1)$ f are minim egal cu 2
$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \Rightarrow m>0 \\ -\frac{\Delta}{4a}=2 \Rightarrow -\frac{1+4m}{4m}=2 \end{cases}$

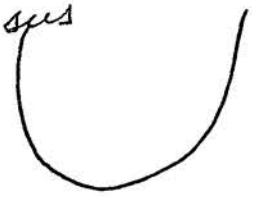
$\Leftrightarrow -1-4m=8m \Leftrightarrow 12m=-1$
$\Rightarrow m=-\frac{1}{12}\notin(0;\infty)$
$\Rightarrow \nexists m$ pt care f_m are minim egal cu 2

GRAFICUL FUNCȚIEI DE GR II

1) f are forma $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$

2) G_f fct de gr II se numește PARABOLĂ și are forma

$a>0 \Rightarrow$ ramuri în sus



$a<0 \Rightarrow$ ramuri în jos



3) în orice situație avem un vârf, $V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$

4) <u>etapele trasării graficului</u>

E_1) $a>0 \Rightarrow G_f$ are forma $\cup$ sau $a<0 \Rightarrow G_f$ are forma $\cap$

E_2) $\cap Oy: x=0 \Rightarrow f(0)=\ldots \Rightarrow A(0;f(0))\in G_f$

$\cap Ox: y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow$ cazuri

$\Delta>0 \Rightarrow x_1=\ldots, x_2=\ldots \Rightarrow B(x_1,0)\in G_f$, $C(x_2,0)\in G_f$

$\Delta=0 \Rightarrow x_1=x_2=\ldots \Rightarrow B(x_1,0)\in G_f$

$\Delta<0 \Rightarrow G_f \cap Ox$

E_3) calculăm $x_V=-\frac{b}{2a}$, $y_V=-\frac{\Delta}{4a}$

E_4) $x=-\frac{b}{2a}$ e axă de simetrie

E_5) trasăm G_f ținând cont că trece prin pct obținute

Exmpl 1: se cere G_f pt $f(x)=2x^2-3x+1$

E_1) $a=2>0 \Rightarrow G_f$ are forma $\cup$

E_2) $\cap Oy: x=0 \Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow A(0;1)\in G_f$

$\cap Ox: y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow 2x^2-3x+1=0$

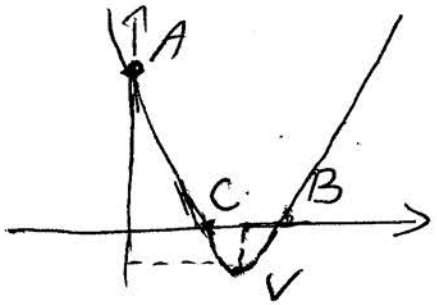
$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2\cdot 2}=\frac{3\pm 1}{4}$ $\begin{matrix}1\Rightarrow B(1;0)\in G_f\\ \frac{1}{2}\Rightarrow C(\frac{1}{2};0)\in G_f\end{matrix}$

E_3) $x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{2\cdot 2}=\frac{3}{4}$ $\Rightarrow V(\frac{3}{4};-\frac{1}{8})$

$y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1}{4\cdot 2}=-\frac{1}{8}$

E_4) $x=-\frac{b}{2a} \Rightarrow x=\frac{3}{4}$ axă de simetrie

E_5)



Exmpl 2: Se cere G_f pt $f(x)=-x^2+4x-4$

E_1) $a=-1<0 \Rightarrow G_f$ are forma $\cap$

E_2) $\cap Oy: x=0 \Rightarrow f(0)=-4 \Rightarrow A(0;-4)\in G_f$

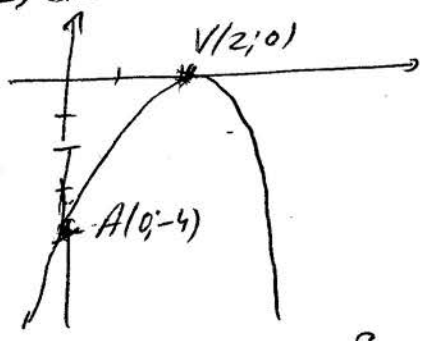
$x^2-4x+4=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2\cdot 1}=2 \Rightarrow B(2;0)\in G_f$

E_3) $x_V=-\frac{b}{2a}=\frac{-4}{-2}=2$ $\Rightarrow V(2;0)\in G_f$

$y_V=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{0}{4}=0$

E_4) $x=-\frac{b}{2a} \Rightarrow x=2$ axă de simetrie

E_5)



Exmpl 3: se cere G_f pt $f(x)=x^2+4x+6$

E_1) $a=1>0 \Rightarrow G_f$ are forma $\cup$

E_2) $\cap Oy: x=0 \Rightarrow f(0)=6 \Rightarrow A(0;6)\in G_f$

$\cap Ox: y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow x^2+4x+6=0$

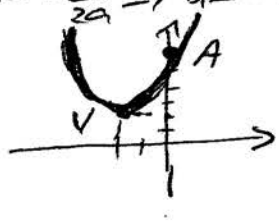
$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{-8}}{2\cdot 1}$ nu $\Delta<0 \Rightarrow G_f \cap Ox$

E_3) $x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{4}{2}=-2$ $\Rightarrow V(-2;2)\in G_f$

$y_V=-\frac{\Delta}{4a}=\frac{8}{4}=2$

E_4) $x=-\frac{b}{2a} \Rightarrow x=-2$ axă de simetrie

E_5)



MONOTONIA FUNCȚIEI DE GRADUL II

E_1) pt $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$, forma graficului depinde de semnul lui a

E_2) $a>0 \Rightarrow$

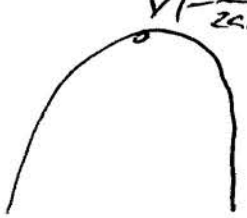


$V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$

$\Rightarrow f_S \searrow$ pe $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$ se ia interval închis în ambele părți

$f_S \nearrow$ pe $\left[-\frac{b}{2a};\infty\right)$

E_3) $a<0 \Rightarrow$



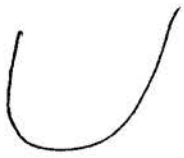
$V\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$

$\Rightarrow f_S \nearrow$ pe $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right]$

$f_S \searrow$ pe $\left[-\frac{b}{2a};\infty\right)$

E_4) monotonia se deduce din faptul că mergând cu creionul pe grafic de la stânga la dreapta, graficul urcă sau coboară

Exp 1: Studiați monotonia lui $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2-12x+5$

E_1) $a>0 \Rightarrow$ G are forma 

E_2) $x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{-12}{6}=2$

E_3) $f_S \searrow$ pe $(-\infty;2]$ și $f_S \nearrow$ pe $[2;\infty)$

Exp 2: Studiați monotonia lui $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2+6x-3$

E_1) $a=-2<0 \Rightarrow$ G are forma 

E_2) $x_V=-\frac{b}{2a}=-\frac{6}{-4}=\frac{3}{2}$

E_3) $f_S \searrow$ pe $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right]$

$f_S \nearrow$ pe $\left[\frac{3}{2};\infty\right)$

CONDIȚII PENTRU GRAFICUL UNEI FUNCȚII DE GRAD II

I G_f tangent la Ox (intersectează Ox într-un singur punct) $\Leftrightarrow \Delta = 0$

II G_f nu intersectează $Ox \Leftrightarrow \Delta < 0$

III G_f intersectează Ox în 2 pct distincte $\Leftrightarrow \Delta > 0$

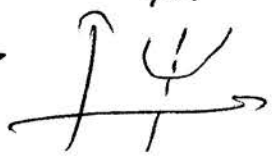
IV f convexă $\Leftrightarrow G_f \cup \Leftrightarrow a > 0$

f concavă $\Leftrightarrow G_f \cap \Leftrightarrow a < 0$

V G_f are vârful pe $Oy \Leftrightarrow x_V = 0 \Leftrightarrow -\frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow b = 0$

VI G_f are vârful pe $Ox \Leftrightarrow y_V = 0 \Leftrightarrow -\frac{\Delta}{4a} = 0 \Leftrightarrow \Delta = 0$

VII axa de simetrie pt $G_f \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$



VIII G_f deasupra de Ox $\Leftrightarrow f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

G_f sub axa Ox $\Leftrightarrow f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$

G_f strict deasupra de Ox $\Leftrightarrow f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

G_f strict sub axa Ox $\Leftrightarrow f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

CONDIȚII DE INTERSECȚIE A DOUĂ GRAFICE (SAU A DOUĂ FIGURI)

– se notează atât $f(x)=y$ cât și $g(x)=y$ și se rezolvă sistemul format din ecuațiile lor
Graficele sunt:

a) tangente $\Leftrightarrow$ sistemul are soluție unică
b) secante $\Leftrightarrow$ sistemul are două sau mai multe soluții
c) nu se intersectează $\Leftrightarrow$ sistemul nu are soluție

---

Exp 1: $m=?$ dacă G_f și G_g tangente unde $f(x)=2x^2+4x+3$ și $g(x)=x^2+mx+2$, se cere punctul comun

$E_1)\begin{cases} y=2x^2+4x+3 \\ y=x^2+mx+2 \end{cases}$ are sol unică $\Leftrightarrow 2x^2+4x+3=x^2+mx+2$ are sol unică

$\Leftrightarrow x^2+(4-m)x+1=0$ are sol unică $\Leftrightarrow \Delta=0 \Leftrightarrow$

$(4-m)^2-4\cdot1\cdot1=0 \Leftrightarrow 16-8m+m^2-4=0 \Leftrightarrow m^2-8m+12=0$

$\Leftrightarrow m_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2\cdot1}=\frac{8\pm4}{2}\begin{matrix}\nearrow 6\\ \searrow 2\end{matrix} \Rightarrow m\in\{2;6\}$

$E_2)$ pt $m=2 \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{0}}{2}=-1$, $f(-1)=1 \Rightarrow$
$A(-1;1)$ pct comun

pt $m=6 \Rightarrow x^2-2x+1=0 \Rightarrow x_1=x_2=1 \Rightarrow f(1)=9 \Rightarrow B(1;9)$ pct comun

Exp 2: se cere pct de intersecție dintre $2x+3y-8=0$ și $f(x)=6x-4$

$E_1)\begin{cases} 2x+3y-8=0 \\ y=6x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{8-2x}{3} \\ y=6x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{8-2x}{3}=6x-4 \mid\cdot 3$

$\Leftrightarrow 8-2x=18x-12 \Leftrightarrow 20x=20 \Rightarrow x=1$, $y=6x-4 \Rightarrow y=2$

$\Rightarrow A(1;2)$ pct cerut

MULȚIMEA VALORILOR (IMAGINEA) UNEI FUNCȚII DE GRADUL I SAU GRAD II

(N1)

$\mathrm{Im} f$ = reuniunea tuturor intervalelor de pe linia lui f pe care f este strict monotonă

E_1) se precizează monotonia în funcție de semnul lui a

E_2) se face tabel de variație

x		
$f(x)$		

unde pe linia lui f punem săgeți de monotonie, în capete închise ale D_f calculăm $f(\text{nr})$ iar la capete deschise (inclusiv $\pm\infty$) calc. limita

Obs 1: metoda poate fi folosită doar la fct de gr I sau gr II, unde $D_f = I$ sau $D_f = \mathbb{R}$, cu observația că dacă f e fct de gr II, atunci trebuie să discutăm în funcție de poziția vârfului

Obs 2: dacă $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$ atunci singura metodă este:

E_1) not $f(x) = y$ și ordonăm în fct de x

E_2) $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta_x \geq 0 \Rightarrow y \in I \Rightarrow \mathrm{Im} f = I$

Obs 3: Dacă $\mathrm{Im} f$ interval mărginit $\Rightarrow f$ mărginită, altfel f nemărginită

Obs 4: metoda cu $\Delta \geq 0$ e OK și la $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = $ fct gr II

Exm 1: $f(x) = -2x+1$, se cere $f([1;3))$

E_1) $a = -2 < 0 \Rightarrow f \searrow$

E_2)

x	$[1$		$3)$
$f(x)$	$[-1$	$\searrow$	$-5)$

$f(1) = -2+1 = -1$

$\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x<3}} f(x) = -2 \cdot 3 + 1 = -5$

E_3) $\mathrm{Im} f = (-5;-1] \Rightarrow f$ mărginită, $\nexists \min f$, $\max f = -1$

Exm 2: $f(x) = x^2 - 6x + 4$, se cere $f([-2;5])$

E_1) $a = 1 > 0 \Rightarrow G_f$ are forma $\cup$

E_2)

x	$[-2$		3		$5)$
$f(x)$	$[20$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$-1)$

$f(-2) = 4+12+4 = 20$

$\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ x<5}} f(x) = 25 - 30 + 4 = -1$

$\Delta = \ldots$, $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -5$

$\mathrm{Im} f = [-5;20] \cup [-5;-1) = [-5;20] \Rightarrow f$ mărg, $\min f = -5$, $\max f = 20$

Exm 3: $f(x) = -x^2 + 4x + 1$, se cere $f((-2;1])$

E_1) $a = -1 < 0 \Rightarrow G_f \cap$

E_2)

x	$(-2$		$1]$		2
$f(x)$	$(-11$	$\nearrow$	$4]$	$\searrow$	

$\lim\limits_{\substack{x \to -2 \\ x>-2}} f(x) = -11$; $f(1) = 4$, $x_v = -\frac{b}{2a} = 2 \notin (-2;1]$

$\Rightarrow \mathrm{Im} f = (-11;4] \Rightarrow f$ mărg, $\nexists \min$, $\exists \max = 4$

Exm 4: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$, $\mathrm{Im} f = ?$

E_1) not $f(x) = y \Rightarrow x^2 y + xy + y = x^2 - x + 1 \Leftrightarrow$

$x^2(1-y) - x(1+y) + 1 - y = 0$

E_2) $x \in \mathbb{R} \to \Delta_x \geq 0 \Rightarrow (1+y)^2 - 4(1-y)(1-y) \geq 0$

$\Leftrightarrow 1 + 2y + y^2 - 4(1 - 2y + y^2) \geq 0 \Leftrightarrow -3y^2 + 10y - 3 \geq 0 \quad | \cdot (-1)$

$3y^2 - 10y + 3 \leq 0 \Rightarrow y_1 = 3$, $y_2 = 1/3$

E_3)

y		$1/3$		3
$3y^2-10y+3$	$+ + +$	0	$- - -$	$0 \quad + + +$

Pt că $3y^2 - 10y + 3 \leq 0 \Leftrightarrow y \in [\frac{1}{3}; 3] \Rightarrow$

$\mathrm{Im} f = [1/3; 3] \Rightarrow f$ mărg, $\min f = \frac{1}{3}$, $\max = 3$

GĂSIREA PUNCTELOR FIXE PENTRU O FAMILIE DE PARABOLE

(N3)

Se dă $f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m + 2$, $m \neq 0$
Se cere punctele fixe ale familiei de parabole

E_1) se notează $f_m(x) = y$ și se trece totul în partea dreaptă (pentru a avea mai puțini termeni cu minus)

E_2) se dă m factor comun, se obține o relație de forma $m \cdot (\dots) + \dots = 0, \forall m \in \mathbb{R}$

E_3) Deoarece relația este adevărată $\forall m \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \begin{cases} (\dots) = 0 \Rightarrow x_{1,2} \text{ și } x \text{ înlocuiește în relația} \\ \dots\dots = 0 \quad \text{a 2-a} \Rightarrow y = \dots \end{cases}$

E_4) Punctele obținute sunt punctele fixe

Exemplu: $f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m + 2$

E_1) notăm $f_m(x) = y \Rightarrow y = mx^2 + 2(m+1)x + m + 2$

$\Rightarrow mx^2 + 2mx + 2x + m + 2 - y = 0$

E_2) $m(x^2 + 2x + 1) + 2x + 2 - y = 0$, $\forall m \neq 0$

E_3) $\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = \dfrac{-2}{2} = -1 \\ 2x + 2 - y = 0 \end{cases}$

înlocuim $x = -1$ în $2x + 2 - y = 0 \Rightarrow -2 + 2 - y = 0$

$\Rightarrow y = 0$

$\Rightarrow A(-1; 0)$ este punct fix

DETERMINAREA LOCULUI GEOMETRIC AL VÂRFULUI UNEI FAMILII DE PARABOLE (N3)

E_1) Scriem coordonatele vârfurilor $\begin{cases} x_V = -\frac{b}{2a} \\ y_V = -\frac{\Delta}{4a} \end{cases}$

E_2) Scoatem pe m din cea mai simplă, îl înlocuim în cealaltă

E_3) Scriem relația înlocuind x_V cu x, y_V cu y și obținem relația locului geometric.

Dacă relația are forma $ax+by+c=0 \Rightarrow$ dreaptă, dacă are forma $y=ax^2+bx+c \Rightarrow$ parabolă, altfel locul geometric este curba de ec. respectivă

Exp.: Determinați curba pe care sunt situate vârfurile următoarelor familii de parabole:

$f_m(x)=(m-2)x^2+(2m-1)x+m-5$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$E_1) x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2m-1}{2(m-2)}$

$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(2m-1)^2-4(m-2)(m-5)}{4(m-2)} = -\frac{4m^2-4m+1-4(m^2-7m+10)}{4(m-2)}$

$\Rightarrow y_V = -\frac{24m-39}{4(m-2)} \Rightarrow \begin{cases} x_V = \frac{1-2m}{2m-4} \\ y_V = \frac{39-24m}{4m-8} \end{cases}$

$E_2)$ Cea mai simplă $x_V = \frac{1-2m}{2m-4} \Leftrightarrow 2m x_V - 4x_V = 1-2m \Leftrightarrow$

$m(2x_V+2) = 1+4x_V \Leftrightarrow m = \frac{4x_V+1}{2x_V+2}$. Înlocuind în y

$\Rightarrow y_V = \frac{39-24\cdot\frac{4x_V+1}{2x_V+2}}{4\cdot\frac{4x_V+1}{2x_V+2}-8} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow y_V = \frac{3x_V-9}{2} \Leftrightarrow 3x_V - 2y_V - 9 = 0$

E_3) Locul geometric este dreapta de ecuație $3x-2y-9=0$

PORȚIUNEA DIN LOCUL GEOMETRIC AL VÂRFURILOR FUNCȚIEI DE GRADUL II PENTRU CARE GRAFICELE AU RAMURILE ÎN SUS (RESPECTIV ÎN JOS) (N3)

E_1) Se găsește locul geometric al vârfurilor astfel:

calc $\begin{cases} x_V = \dots \\ y_V = \dots \end{cases}$, găsim pe m în fct de x_V sau de y_V (unde e mai simplu) și înlocuim în cealaltă

E_2) Graficele au ramurile în sus $\Leftrightarrow a > 0$ și găsim

Graficele au ramurile în jos $\Leftrightarrow a < 0$

intervalul de variație pentru x, apoi l.g. cerut e porțiunea din curba anterioară cu condiția ca x să vf. ... (cu tabel de semne)

Ex.: Fie $f_m(x) = (m-5)x^2 + (2m-1)x + m + 2$

Găsiți porțiunea din l.g. al vârfurilor funcțiilor cu ramurile în sus

E_1) $\begin{cases} x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{2m-1}{2(m-5)} = \frac{-2m+1}{2m-10} \Rightarrow 2m x_V - 10 x_V = -2m + 1 \\ y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(2m-1)^2 - 4(m-5)(m+2)}{4(m-5)} = -\frac{4m^2 - 4m + 1 - 4(m^2 - 3m - 1)}{4m - 20} \end{cases}$

E_2) Din prima relație (e mai simplă) $\Rightarrow m(2x_V + 2) = 10 x_V + 1 \Rightarrow$

$m = \frac{10x_V + 1}{2x_V + 2}$, înlocuim în $y_V = -\frac{4m^2 - 4m + 1 - 4m^2 + 12m + 40}{4m - 20} \Rightarrow$

$$y_V = -\frac{8m + 41}{4m - 20} = -\frac{8 \cdot \frac{10x_V + 1}{2x_V + 2} + 41}{4 \cdot \frac{10x_V + 1}{2x_V + 2} - 20} = -\frac{80x_V + 8 + 82x_V + 82}{40x_V + 4 - 40x_V - 40}$$

E_3) $y_V = -\frac{162x_V + 90}{-36} = -\frac{81x_V + 45}{-18} = \frac{81x_V + 45}{18} \Rightarrow$

E_4) locul geometric este $18y = 81x + 45 \mid :9 \Rightarrow 2y = 9x + 5$

E_5) din acest loc geometric, ne trebuie doar porțiunea ce conține parabolele cu vf în sus $\Rightarrow a > 0 \Rightarrow m - 5 > 0 \Rightarrow m > 5$

$$\Rightarrow \frac{10x_V + 1}{2x_V + 2} > 5 \Rightarrow \frac{10x_V + 1 - 10x_V - 10}{2x_V + 2} > 0 \Rightarrow \frac{-9}{2x_V + 2} > 0 \Rightarrow x_V < -1$$

$\Rightarrow x \in (-\infty, -1)$

SITUAREA RĂDĂCINILOR UNEI EC DE GR II FAȚĂ DE PARAMETRI REALI (I) (N3)

E_1) Se face Gf cu ramurile în sus (deoarece condițiile vor fi aceleași) ținând cont de intervalul rădăcinilor

E_2) Cond. de tip Δ: $\Delta > 0$ dacă din ipoteză deducem că rădăcinile sunt distincte și $\Delta \geq 0$ dacă rădăcinile pot fi egale

E_3) Cond de tip $af(nr)$: prin fiecare număr ducem $\perp$ pe Ox și dacă acea $\perp \cap G_f$ deasupra de $Ox \Rightarrow af(nr) > 0$, dacă acea $\perp \cap G_f$ sub $Ox \Rightarrow af(nr) < 0$

Obs.: Dacă numărul poate fi vreuna din rădăcini $\Rightarrow af(nr) \geq 0$ și $af(nr) \leq 0$, adică apare și „egal"

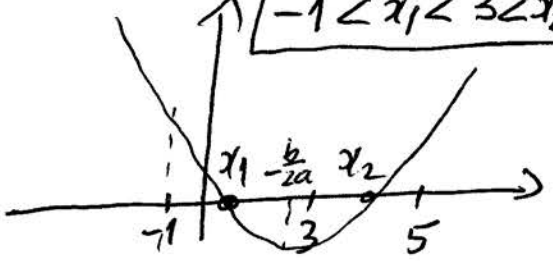
E_4) Cond de tip x_V: Din grafic, prin $x_V = -\frac{b}{2a}$ ducem $\perp$ pe Ox și vedem dacă $x_V < nr$ sau $x_V > nr$ pentru toate numerele din afara rădăcinilor

Obs.: Dacă x_V poate fi vreunul din numere atunci apare și „egal", adică $x_V \leq nr$ sau $x_V \geq nr$.

E_5) Se rezolvă fiecare condiție, apoi $S = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \dots$

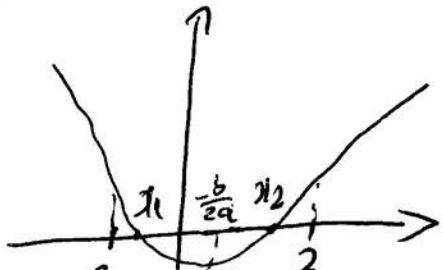
Exp1: $m = ?$ dacă $(m+1)x^2 - mx + 3 - m = 0$

$-1 < x_1 < 3 < x_2 \leq 5$



$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(-1) > 0 \\ af(3) < 0 \\ af(5) \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} > -1 \\ -\frac{b}{2a} < 5 \end{cases}$$

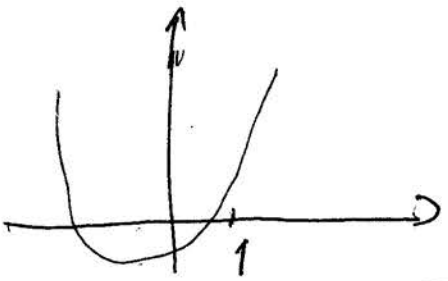
$-2 \leq x_1 \leq x_2 < 3$



$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(-2) \geq 0 \\ af(3) > 0 \\ -\frac{b}{2a} \geq -2 \\ b < 3 \end{cases}$$

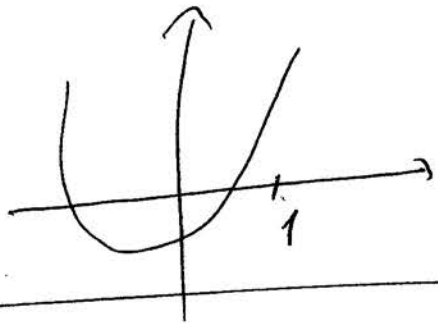
SITUAREA RĂDĂCINILOR UNEI EC. DE GR II FAȚĂ DE PARAMETRI REALI (II) (N3)

Exp 1: $x_1 < x_2 < 1$



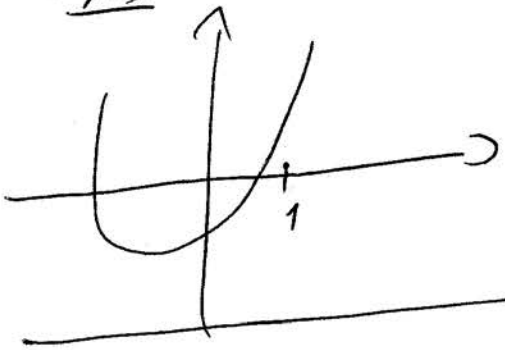
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(1) > 0 \\ -\frac{b}{2a} < 1 \end{cases}$$

Exp 2: $x_1 < x_2 \leq 1$



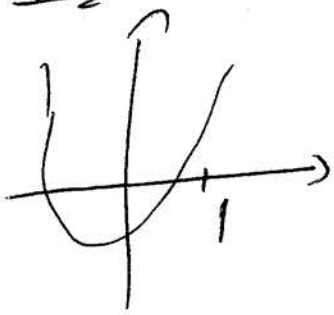
$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(1) \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} < 1 \end{cases}$$

Exp 3: $x_1 \leq x_2 < 1$



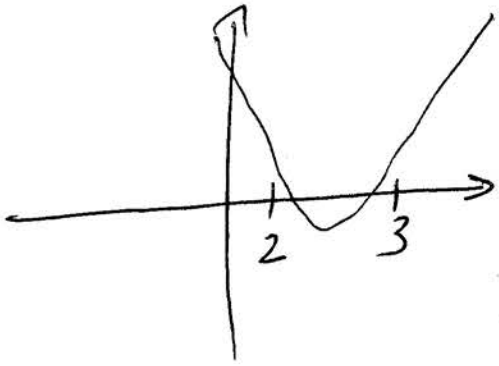
$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(1) > 0 \\ -\frac{b}{2a} < 1 \end{cases}$$

Exp 4: $x_1 \leq x_2 \leq 1$



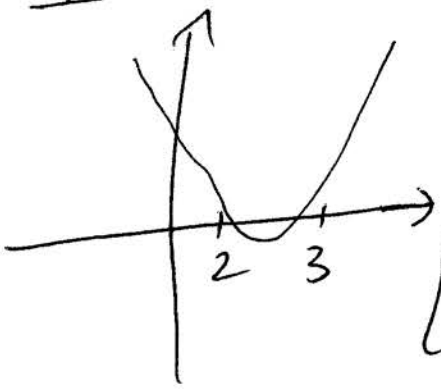
$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(1) \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} \leq 1 \end{cases}$$

Exp 5: $2 < x_1 < x_2 \leq 3$



$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(2) > 0 \\ af(3) \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} > 2 \\ -\frac{b}{2a} < 3 \end{cases}$$

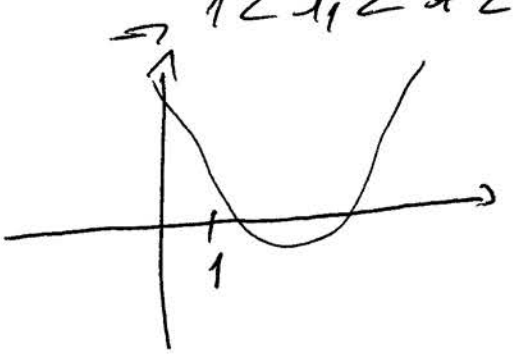
Exp 6: $2 < x_1 \leq x_2 \leq 3$



$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ af(2) > 0 \\ af(3) \geq 0 \\ -\frac{b}{2a} > 2 \\ -\frac{b}{2a} \leq 3 \end{cases}$$

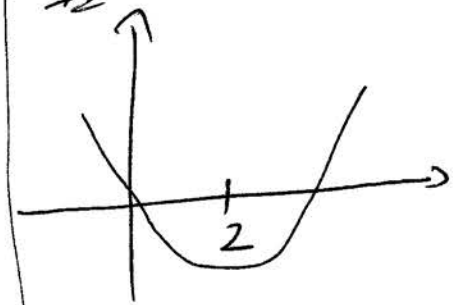
Exp 7: ambele rād în $(1;\infty)$

$1 < x_1 < x_2$



$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(1) > 0 \\ -\frac{b}{2a} > 1 \end{cases}$$

Exp 8: $x_1 < 2 < x_2$



$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ af(2) < 0 \end{cases}$$

SITUAREA RĂDĂCINILOR ECUAȚIEI DE GRADUL II FAȚĂ DE PARAMETRI REALI (METODA TRANSLAȚIEI) (N3)

E_1) notăm cu y diferența între rădăcină și număr și o comper cu 0

E_2) înlocuim pe x în funcție de y în ecuația inițială

E_3) obținem o ecuație la care rădăcinile trebuie comparate cu 0, deci punem condiții la Δ_y, P_y, S_y

---

Caz I: $x_1 < x_2 < p \Rightarrow \begin{cases} x_1 - p < 0 \\ x_2 - p < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 < 0 \\ y_2 < 0 \end{cases}$ și $\begin{matrix} y = x - p \\ x = y + p \end{matrix}$

Înloc. în ec. inițială și cum $y_1 > 0, y_2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta_y > 0 \\ P_y > 0 \\ S_y > 0 \end{cases}$

Caz II: $x_1 < p < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - p < 0 \\ x_2 - p > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 < 0 \\ y_2 > 0 \end{cases}$ și $\begin{matrix} y = x - p \\ x = y + p \end{matrix}$

Înloc în ec. inițială și cum $y_1 < 0, y_2 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta_y > 0 \\ P_y < 0 \end{cases}$

Caz III: $x_1 < x_2 < p \Rightarrow \begin{cases} x_1 - p < 0 \\ x_2 - p < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 < 0 \\ y_2 < 0 \end{cases}$ și $\begin{matrix} y = x - p \\ x = y + p \end{matrix}$

Înloc în ec. inițială și cum $y_1 < 0, y_2 < 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta_y > 0 \\ P_y > 0 \\ S_y < 0 \end{cases}$

Exp.: Fie ecuația: $(m+1)x^2 - (m-1)x + 3 - m = 0$

Determinați m pentru care $x_1 < 2 < x_2$.

Din $x_1 < 2 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2 < 0 \\ x_2 - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 < 0 \\ y_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $x - 2 = y$, $x = y + 2$

$\Rightarrow (m+1)(y+2)^2 - (m-1)(y+2) + 3 - m = 0 \Leftrightarrow (m+1)y^2 + (3m+5)y + m + 9 = 0$

$\exists x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow P_y > 0 \Rightarrow m \in I_1$ $\Rightarrow S = I_1 \cap I_2$