Data:

CLASA A IX-A

SETUL 1
ALGEBRĂ IX, partea 1

Prof. Ovidiu Bădescu

Colegiul Național
"Traian Lalescu", Reșița
An școlar

MULȚIMI DE NUMERE

ECUAȚII, SCHEMA LUI HORNER

INECUAȚII CU TABEL DE SEMNE

ECUAȚII, INECUAȚII CU MODULE

PARTE ÎNTREAGĂ ŞI FRACȚIONARĂ

ECUAȚII CU PARTE ÎNTREAGĂ

ŞIRURI, PROGRESII

Nivel 0: 8 **pag**
Nivel *: 11 **pag**
Nivel **: 6 **pag**
Nivel *:** 1 **pag**

TOTAL: 26 **pag**

MULȚIMI DE NUMERE. FRACȚII ZECIMALE ȘI ORDINARE

1) naturale: $\boxed{\mathbb{N}=\{0;1;2;\dots\}}$

2) întregi: $\boxed{\mathbb{Z}=\{\dots;-2;-1;0;1;2\dots\}}$

3) raționale: $\boxed{\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}\mid a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0\}}$

și $\mathbb{Q}$ se mai poate scrie sub forma

$\boxed{\mathbb{Q}=\{\text{fr zecimale cu nr. finit zecimale}\}\cup\{\text{fr. zecimale periodice}\}}$

4) iraționale: $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și avem

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\{$fr. zecimale neperiodice cu nr. infinit de zecimale$\}$

Obs.: toți radicalii care nu se extrag exact sunt nr. iraționale

Obs2: $\pi=3,14\dots\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

$e=2,72\dots\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ (nr. lui Euler)

5) reale: $\mathbb{R}$ și $\boxed{\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})}$

Obs1: ∀ mț de mai sus „delată" înseamnă că nu conține pe 0

Obs2: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ și $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\subset\mathbb{R}$

6) transf din fracții ordinare (cele cu linie de fracție) în fracții zecimale (cele cu virgulă) se face prin împărțirea numărătorului la numitor

7) transf. din fracții zecimale (cele cu virgulă) în fracții ordinare (cele cu linie de fracție)

a) neperiodice: se scrie la numărător numărul fără virgulă, iar la numitor 1 urmat de atâtea zerouri câte cifre are nr. inițial după virgulă

b) periodice: se scrie la numărător numărul fără virgulă din care se scade partea până la perioadă, iar la numitor se scriu atâtea de 9 câte cifre are perioada urmați de atâtea de 0 câte cifre sunt între virgulă și perioadă

Exp: Găsiți numerele naturale, întregi, raționale, iraționale din

$A=\{2;\frac{3}{5};-5;4,6;\sqrt{5};-\sqrt{9};2,3456\dots;\pi;4,851515\dots;2,(5);e\}$

naturale: 2

întregi: $2;-5;-\sqrt{9}$ pt că $-\sqrt{9}=-3$

raționale: $2;\frac{3}{5};-5;4,6;-\sqrt{9};4,85151\dots=4,8(51);2,(5)$

iraționale: $\sqrt{5};2,3456\dots;\pi;e$

Exp.: Arătați că $\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$

(R.A.) Pp. $\sqrt{5}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{5}=\frac{m}{n}$ ired $\Rightarrow 5n^2=m^2$

$\Rightarrow 5\mid m^2\Rightarrow 5\mid m\Rightarrow m=5m_1\Rightarrow 5n^2=25m_1^2$

$\Rightarrow n^2=5m_1^2\Rightarrow 5\mid n^2\Rightarrow 5\mid n\Rightarrow n=5n_1$

$\Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{5m_1}{5n_1}$ ... ired ↯

Exp.: transformați: a) $\frac{2157}{5}$ b) $\frac{5}{3}$; c) $\frac{5}{6}$; d) 431,41 e) 1,(6) f) 1,8(21)

a) $2157 \mid 5$ — 20 — $=15$ — 15 — $=7$ — 5 — 20 — $=2$

$\frac{2157}{5}=431,4$

b) $\frac{5}{3}\mid 3$ — 20 — 18 — $=20$

$\frac{5}{3}=1,(6)$

c) $\frac{5}{0}\mid 6$ — 50 — 48 — $=20$ — 20 — $=2$

$\frac{5}{6}=0,8(33)$

d) $431,41=\frac{43141}{100}$

e) $1,(6)=\frac{16-1}{9}=\frac{15}{9}^{(3}=\frac{5}{3}$

f) $1,8(21)=\frac{1821-18}{990}=\frac{1803}{990}^{(3}=\frac{601}{330}$

EXTRAGERE RADICAL (N2)

E_1) se împarte numărul în grupe de 2 cifre de la virgulă în stg și în dreapta, grupe de după virgulă, punem 0

E_2) se găsește cel mai mare număr al cărui pătrat să nu depășească primul grup de cifre (putem radical din primul grup de cifre)

E_3) nr. obținut se ridică la pătrat, se scade din prima grupă, se coboară următoarea grupă $\Rightarrow N_1$

E_4) se dublează rezultatul, se completează cu o cifră a.î. înmulțit cu aceeași cifră să dea cel mai mare număr $\leq N_1$

E_5) se completează rezultatul cu acea cifră, se scade numărul obținut prin înmulțire din N_1

E_6) se repetă procedeul

Exp.: $\sqrt{3'45'78,90}$

1^2

245

224

$=2178$

1825

$=35390$

33381

$=2009$

$185,9$

$29 \cdot 9 = 261$

$28 \cdot 8 = 224$

$365 \cdot 5 = 1825$

$366 \cdot 6 = 2196$

$3709 \cdot 9 = 33.381$

Exp 2: Calculați $\sqrt{851,4}$ cu 2 zecimale

$\sqrt{851,4000}$

2^2

451

441

$=1040$

581

$=45900$

42789

$29,17$

$49 \cdot 9 = 441$

$582 \cdot 2 = 1164$

$581 \cdot 1 = 581$

$5829 \cdot 9 = 52461$

$5828 \cdot 8 = 46624$

$5837 \cdot 7 = 42789$

FOLOSIREA PROPRIETĂȚILOR DE DIVIZIBILITATE ÎN $\mathbb{Z}$

(N2)

E_1) se folosesc: a) $\left.\begin{matrix} A/B \\ A/C \end{matrix}\right\} \Rightarrow A/(B+C)$ și $A/(B-C)$

b) $A/A, \forall A \in \mathbb{Z}$ c) $A/B \Rightarrow A/(nB), \forall n \in \mathbb{Z}$

E_2) dacă se cer valori naturale ale fracției, se verifică din valorile întregi obținute pe cele care corespund

---

Ex.: Găsiți $A=\{x \in \mathbb{Z} \mid \frac{x^3-3x-2}{2x+1} \in \mathbb{N}\}$

E_1) $\frac{x^3-3x-2}{2x+1} \in \mathbb{N} \Rightarrow \boxed{2x+1 \mid x^3-3x-2}$

E_2) Dar, $2x+1 \mid 2x+1 \Rightarrow 2x+1 \mid x^2(2x+1) \Rightarrow 2x+1 \mid 2x^3+x^2$

Cum $2x+1 \mid x^3-3x-2 \Rightarrow 2x+1 \mid 2(x^3-3x-2) \Rightarrow 2x+1 \mid 2x^3-6x-4$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x+1 \mid (2x^3+x^2)-(2x^3-6x-4) \Rightarrow \boxed{2x+1 \mid x^2+6x+4}$

E_3) Deci, $2x+1 \mid x^2+6x+4 \Rightarrow 2x+1 \mid 2(x^2+6x+4) \Rightarrow 2x+1 \mid 2x^2+12x+8$

Dar, $2x+1 \mid 2x+1 \Rightarrow 2x+1 \mid x(2x+1) \Rightarrow 2x+1 \mid 2x^2+x$

$\Rightarrow 2x+1 \mid (2x^2+12x+8)-(2x^2+x) \Rightarrow \boxed{2x+1 \mid 11x+8}$

E_4) Deci, $2x+1 \mid 11x+8 \Rightarrow 2x+1 \mid 2(11x+8) \Rightarrow 2x+1 \mid 22x+16$

Dar, $2x+1 \mid 2x+1 \Rightarrow 2x+1 \mid 11(2x+1) \Rightarrow 2x+1 \mid 22x+11$

$\Rightarrow 2x+1 \mid (22x+16)-(22x+11) \Rightarrow 2x+1 \mid 5 \Rightarrow 2x+1 \in D_5$

E_5) $\Rightarrow 2x+1 \in \{\pm 1; \pm 5\} \Rightarrow x \in \{0; -1; 2; -3\}$ valori posibile pt că x trebuie să fie din $\mathbb{Z}$. Verificăm pt care din aceste valori $F(x)=\frac{x^3-3x-2}{2x+1} \in \mathbb{N}$

$x=0 \Rightarrow F(0)=\frac{-2}{1} \notin \mathbb{N}$, U.O.

$x=-1 \Rightarrow F(-1)=\frac{0}{-1}=0 \in \mathbb{N}$ OK

$x=2 \Rightarrow F(2)=\frac{0}{5} \in \mathbb{N}$ OK

$x=-3 \Rightarrow F(-3)=\frac{-20}{-5}=4$ OK

$\Rightarrow \boxed{A=\{-1; 2; -3\}}$

OPERAȚII CU INTERVALE

(N1)

1) $[a;b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$

$(a;b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \}$

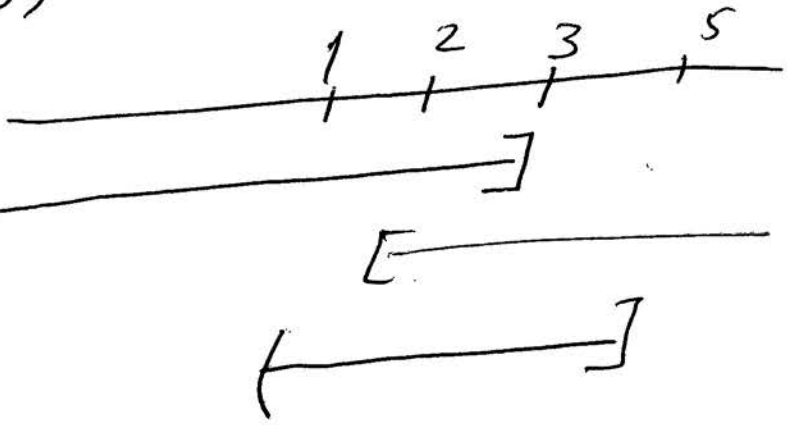
$(a;b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$

2) $I_1 \cup I_2 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \in I_1 \text{ sau } x \in I_2 \}$

$I_1 \cap I_2 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \in I_1 \text{ și } x \in I_2 \}$

$I_1 \setminus I_2 = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \in I_1 \text{ și } x \notin I_2 \}$.

Ex: $I_1 = (-\infty; 3]$, $I_2 = [2; \infty)$, $I_3 = (1; 5]$



a) $I_1 \cup I_2 =$

$= (-\infty; \infty) = \mathbb{R}$

b) $I_1 \cap I_2 =$

$= [2; 3]$

c) $I_1 \setminus I_2 = (-\infty; 2)$

d) $I_1 \setminus I_3 = (-\infty; 1]$

Obs: Atunci când avem condiții, se intersectează intervalele iar dacă avem cazuri, se

SCHEMA LUI HORNER PENTRU ECUAȚII DE GRAD SUPERIOR

E_1) se calculează divizorii termenului liber, $D_{\text{termen liber}} = \{ \dots \}$

E_2) se face schema lui Horner pt fiecare divizor până obținem ultimul rezultat (numit rest) egal cu 0, liniile unde restul e diferit de 0 se taie

E_3) pt acel divizor cu restul este 0, ec. devine $(x - \text{divizor})(\text{ec. cu coef. în diag.}) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = d \\ \text{sau} \\ \text{ec. cu coef în diagonală} = 0 \end{cases}$

E_4) dacă pentru niciunul dintre acești divizori nu obținem restul 0, atunci calculăm

$\frac{D_{\text{termen liber}}}{D_{\text{coef lui } x \text{ la grad maxim}}}$ și facem schema lui Horner pentru acești divizori

Obs 1: dacă pt divizori întregi nu obținem restul 0 $\Rightarrow$ ec nu are rădăcini întregi, dar poate avea alte rădăcini

Obs 2: dacă pt divizori $\frac{D_{\text{termen liber}}}{D_{\text{coef lui x putere max}}}$ nu obținem restul 0 $\Rightarrow$ ec nu are rădăcini raționale dar poate avea alte rădăcini

Obs 3: schema lui Horner pentru ec. gr III

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

E_1)	x^3	x^2	x	x^0
	a	b	c	d
α	a	$\alpha a + b = b_1$	$\alpha b_1 + c = c_1$	$\alpha c_1 + d = d_1$

E_2) dacă $d_1 \neq 0 \Rightarrow$ încercăm cu alt divizor, dacă $d_1 = 0 \Rightarrow (x - \alpha)(ax^2 + b_1 x + c_1) = 0$, deci pe prima linie apar puterile lui x în ordine descrescătoare, pe cea de-a doua primul coef se copiază, apoi se înmulțește cu α și se adună în diag., etc

Obs 3: dacă ec nu are termen liber, dăm factor comun pe x la cea mai mică putere la care apare

---

Exp 1: $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$

E_1) $D_{-48} = \{ \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \dots \}_0$

E_2)	x^3	x^2	x	x^0
	1	−12	44	−48
1	1	$1 \cdot 1 - 12 = -11$	$1 \cdot (-11) + 44 = 33$	$1 \cdot 33 - 48 = -15 \neq 0$
−1	1	$1 \cdot (-1) - 12 = -13$	$-1 \cdot (-13) + 44 = 57$	$+57 - 48 \neq 0$
2	1	$2 \cdot 1 - 12 = -10$	$2 \cdot (-10) + 44 = 24$	$2 \cdot 24 - 48 = 0$

$\Rightarrow (x - 2)(1 \cdot x^2 - 10 \cdot x + 24) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ \text{sau} \\ x^2 - 10x + 24 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 6 \\ x_3 = 4 \end{cases} \end{cases}$

S_f: $x \in \{2; 4; 6\}$

Exp 2: $24x^3 + 10x^2 - 13x - 6 = 0$

E_1) $D_{-6} = \{ \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6 \}$ și nu iese Horner pt niciunul

E_2) $\frac{D_{-6}}{D_{24}} = \{ \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{3}{2}; \dots \}$

E_3)	x^3	x^2	x	x^0
	24	10	−13	−6
$\frac{1}{2}$	24	$12 + 10 = 22$	$11 - 13 = -2$	$-1 - 6 = -7 \neq 0$
$-\frac{1}{2}$	24	$-12 + 10 = -2$	$1 - 13 = -12$	$6 - 6 = 0$

$\Rightarrow (x + \frac{1}{2})(24x^2 - 2x - 12) = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ \text{sau} \\ 24x^2 - 2x - 12 = 0 \mid :2 \Rightarrow 12x^2 - x - 6 = 0 \begin{cases} -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} \end{cases} \end{cases}$

S_f: $x \in \{-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{3}{4}\}$

Exp 3: $x^4 - 12x^3 + 27x^2 = 0$

E_1) $x^2(x^2 - 12x + 27) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ \text{sau} \\ x^2 - 12x + 27 = 0 \Rightarrow x_1 = 3, x_2 = 9 \end{cases}$

S_f: $x \in \{0; 3; 9\}$

INECUAȚII DE GR I și GR II

INECUAȚII DUBLE DE GRADUL I

E_1) se înmulțește cu numitorul

E_2) se ține cont de faptul că, prin înmulțire cu nr. pozitiv se păstrează semnul, prin înmulțire cu negativ se schimbă semnul inegalității

E_3) se obține un interval, se aleg soluțiile cerute

INECUAȚII DE GR I REZOLVATE CU TABEL DE SEMNE

E_1) se rezolvă $ax+b=0$

E_2) se folosește regula din tabelul

x		$x_1=-b/a$	
$ax+b$	$-$ semn a	0	semn a

E_3) se alege intervalul cerut

INECUAȚII DE GR II REZOLVATE CU TABEL DE SEMNE

E_1) se rezolvă, dacă e posibil, ecuația $ax^2+bx+c=0$

E_2) în funcție de semnul lui Δ, se alege linia corespunzătoare din tabelul

x		x_1		$x_1=x_2$		x_2	
$\Delta>0$	semn a	0	$-$ semn a	0	semn a		
$\Delta=0$	semn a			0	semn a		
$\Delta<0$	semn a						

E_3) se alege intervalul cerut

Obs.: deși inecuațiile de gr I se rezolvă mult mai simplu fără tabel de semne, rolul acestor pb este să înțelegem tabelul de semne pentru mai târziu

---

Exp 1: $2 \le \frac{3x+1}{2} < 3$ în $\mathbb{Z}$

E_1) $2 \le \frac{3x+1}{2} < 3 \mid \cdot 2$

$4 \le 3x+1 < 6 \mid -1$

$3 \le 3x < 5 \mid : 3$

$1 \le x < \frac{5}{3}$

$\Rightarrow x \in [1, \frac{5}{3})$

E_2) Dar, $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in [1, \frac{5}{3}) \cap \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x = 1$

Exp 2: Cu tabelul de semne, rezolvați: a) $2x-1<0$

b) $x^2-3x+2 \ge 0$

a) $2x-1<0$, ec. atașată este $2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

x		$1/2$	
$2x-1$	$-----$	0	$++++$

$\Rightarrow$ $2x-1<0 \Rightarrow x \in (-\infty; 1/2)$

b) $x^2-3x+2 \ge 0 \Rightarrow$ ec. atașată este $x^2-3x+2=0$

$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$

x		1		2	
x^2-3x+2	$+++$	0	$---$	0	$++$

$\Rightarrow$ $x^2-3x+2 \ge 0 \Rightarrow$

$x \in (-\infty; 1] \cup [2, \infty)$

INECUAȚII DE GR I ȘI DE GR II REZOLVATE CU TABEL DE SEMNE

(N1)

INECUAȚII DE GR I, $ax+b$

E_1) se rezolvă ec. $ax+b=0$

E_2) se folosește regula din tabelul

x		$-b/a$	
$ax+b$	$-\operatorname{sgn} a$	0	$\operatorname{sgn} a$

INECUAȚII DE GR II, ax^2+bx+c

E_1) se rezolvă, dacă e posibil ecuația

E_2) în funcție de semnul lui Δ, se alege linia corespunzătoare din tabelul

x		x_1		$x_1=x_2$		x_2	
$\Delta>0$	$\operatorname{sgn} a$	0	$-\operatorname{sgn} a$	0	$\operatorname{sgn} a$		
$\Delta=0$	$\operatorname{sgn} a$		0		$\operatorname{sgn} a$		
$\Delta<0$	$\operatorname{sgn} a$						

INECUAȚII CU TABEL

E_1) se trece totul în stg, se aduce la ac. numitor, se compară cu 0

E_2) se face tabel de semne, pe prima linie x, pe celelalte expresiile de gr I sau II cu semnele corespunzătoare iar pe ultima linie $E(x)$

E_3) pe linia lui $E(x)$ se folosește atât regula semnelor la înmulțire cât și că $\frac{0}{a}=0$; $\frac{a}{0}=\infty$; $\frac{a}{0}=\infty$ sau $0\cdot a=0, 0\cdot 0=0$ și $a\cdot 0=0$

E_4) se alege pentru x intervalul în care semnul lui $E(x)$ este cel care trebuie

---

Exemplu 1: $\dfrac{(x^2-3x+2)(-x+4)}{2-x}\le 0$

x		1		2		4	
x^2-3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$-x+4$	$+$		$+$		$+$	0	$-$
$2-x$	$+$		$+$		0	$-$	$-$
$E(x)$	$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$

$x\in$ ca $E(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in[1;2)\cup(2;4]$

Exemplu 2: $\dfrac{16x-8}{x^2+3x+2}\ge 2$

E_1) $\dfrac{16x-8}{x^2+3x+2} \overset{x^2+3x+2}{-2}\ge 0$

$$\frac{16x-8-2x^2-6x-4}{x^2+3x+2}\ge 0$$

$$\frac{-2x^2+10x-12}{x^2-3x+2}\ge 0$$

E_2) $-2x^2+10x-12=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-10\pm\sqrt{4}}{-4}$ $\begin{matrix}x_1=3\\ x_2=2\end{matrix}$

$x^2+3x+2=0$ $\begin{matrix}x_1=-1\\ x_2=-2\end{matrix}$

E_3)

x		-2		-1		2		3	
$-2x^2+10x+12$	$-$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$
x^2+3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$E(x)$	$-$	$\|$	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x\in$ ca $E(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-2;-1)\cup[2;3]$

Exemplu 3: $1\le \dfrac{x}{x-3}$

E_1) $1-\dfrac{x}{x-3}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-3-x}{x-3}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{-3}{x-3}\le 0$

E_2)

x		3	
-3	$-$		$-$
$x-3$	$-$	0	$+$
$E(x)$	$+$	$\|$	$-$

E_3) $x\in$ ca $E(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in(3;\infty)$

Exemplu 4: $(x^2-3x+2)(x-4)\le 0$

x		1		2		4	
x^2-3x+2	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$E(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$x\in$ ca $E(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;1]\cup[2;4]$

CONDIȚIA CA O EXPRESIE DE GRAD II SĂ PĂSTREZE SEMN CONSTANT PE $\mathbb{R}$

- se cere $m=?$ dacă $ax^2+bx+c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (sau orice altă inegalitate, dar important e că apare $\forall x \in \mathbb{R}$.
- avem 2 condiții:
  - $a>0$ dacă $f(x)>0$ sau $f(x)\geq 0$ și $a<0$ și $f(x)<0$ sau $f(x)\leq 0$
  - $\Delta<0$ dacă inegalitatea e strictă (indiferent că $f(x)>0$ sau că $f(x)<0$) și $\Delta\leq 0$ dacă inegalitatea nu e strictă (adică $f(x)\geq 0$ sau $f(x)\leq 0$)

a) $ax^2+bx+c>0, \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

b) $ax^2+bx+c\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} a>0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$

c) $ax^2+bx+c<0, \forall x\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

d) $ax^2+bx+c\leq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} a<0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$

Exp 1: $m=?$ dacă $(m-3)x^2-mx-m<0, \forall x\in\mathbb{R}$

$E_1)$ Cond: $\begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$

$E_2)$ $a<0 \Rightarrow m-3<0 \Rightarrow m\in(-\infty;3)=I_1$

$E_3)$ $\Delta<0 \Rightarrow (-m)^2-4(m-3)(-m)<0 \Rightarrow$

$m^2+4m^2-12m<0 \Rightarrow 5m^2-12m<0$

$E_4)$ $5m^2-12m=0 \Rightarrow \begin{cases} m_1=0 \\ m_2=\frac{12}{5} \end{cases}$

$E_5)$ facem tabel de semne

m		0		$12/5$	
$5m^2-12m$	$+$	0	$-$	0	$+$

$E_6)$ $5m^2-12m<0 \Rightarrow m\in(0;12/5)=I_2$

$E_7)$ $I_c=I_1\cap I_2=(0;12/5)$

Exp 2: $m=?$ dacă $x^2+mx+1\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$E_1)$ Cond: $\begin{cases} a>0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$

$E_2)$ $a>0 \Rightarrow 1>0$ adev., $\forall m\in\mathbb{R}=I_1$

$E_3)$ $\Delta\leq 0 \Rightarrow m^2-4\leq 0$, $m^2-4=0 \Rightarrow m=\pm 2$

$E_4)$

m		-2		2	
m^2-4	$+$	0	$-$	0	$+$

$E_5)$ $m^2-4\leq 0 \Rightarrow m\in[-2;2]=I_2$

$E_6)$ $I_c=I_1\cap I_2=[-2;2]$

Exp 3: $m=?$ dacă inecuația $mx^2+x-2>0$ nu are nicio soluție reală

$E_1)$ $mx^2+x-2>0$ nu are nicio soluție reală $\Rightarrow mx^2+x-2\leq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$E_2)$ Cond.: $\begin{cases} a<0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$

$E_3)$ $a<0 \Rightarrow m<0 \Rightarrow m\in(-\infty;0)=I_1$

$E_4)$ $\Delta\leq 0 \Rightarrow 1-4m\cdot(-2)\leq 0 \Rightarrow$

$8m+1\leq 0 \Rightarrow m\leq -\frac{1}{8} \Rightarrow m\in(-\infty;-\frac{1}{8}]=I_2$

$E_5)$ $I_c=I_1\cap I_2=(-\infty;-\frac{1}{8}]$

PROPRIETĂȚI ALE MODULELOR

(N2)

a) $|x| \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

c) $|x| + |y| = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ și } y = 0)$

d) $|x| = |y| \Rightarrow x = \pm y$, se verifică apoi

e) $|x| < c \Leftrightarrow -c < x < c$, $\forall c > 0$

f) $|x| > c \Leftrightarrow (x < -c \text{ sau } x > c)$, $\forall c > 0$

g) $|x| \leq c \Leftrightarrow -c \leq x \leq c$, $\forall c > 0$

h) $|x| \geq c \Leftrightarrow (x \leq -c \text{ sau } x \geq c)$, $\forall c > 0$

i) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

j) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

Exp 1: Rezolvați ecuația:

$|2x-1| + |y-3| = -z^2$

E_1) $|2x-1| \geq 0$ și $|y-3| \geq 0$

$-z^2 \leq 0$

E_2) deci egalitate poate avea loc doar dacă $|2x-1| + |y-3| = 0$ și $-z^2 = 0$

E_3) $|2x-1| + |y-3| = 0$ și cum $|2x-1| \geq 0$ și $|y-3| \geq 0$, pt a avea loc egalitatea trebuie ca $|2x-1| = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ și $|y-3| = 0 \Rightarrow y = 3$

E_4) $-z^2 = 0 \Rightarrow z^2 = 0 \Rightarrow z = 0$

E_5) Așadar, $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$

Exp 2: rezolvați ecuația:

$|1-2x| = |x+4|$

E_1) $|1-2x| = |x+4| \Rightarrow 1-2x = \pm(x+4)$

E_2) $1-2x = x+4 \Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1$, ovf.

în ec $\Rightarrow |1+2| = |-1+4|$ adev $\Rightarrow x = -1$ ok

E_3) $1-2x = -(x+4) \Rightarrow 1-2x = -x-4$

$\Rightarrow -x = -5 \Rightarrow x = 5$, ovf în ec.: $|-9| = |9|$

$x \in \{-1; 5\}$

Exp 3: Rezolvați $|2x-1| < 5$

E_1) $|2x-1| < 5 \Leftrightarrow -5 < 2x-1 < 5 \mid +1$

$\Rightarrow -4 < 2x < 6 \mid :2 \Rightarrow -2 < x < 3$

$\Rightarrow x \in (-2; 3)$

Exp 4: Rezolvați $|-2x+3| \leq 7$

E_1) $|-2x+3| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq -2x+3 \leq 7 \mid -3$

$\Rightarrow -10 \leq -2x \leq 4 \mid \cdot(-1) \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 10 \mid :2$

$\Rightarrow -2 \leq x \leq 5 \Rightarrow x \in [-2; 5]$

Exp 5: Rezolvați $|3x+7| > 1$

E_1) $|3x+7| > 1 \Rightarrow 3x+7 < -1$ sau $3x+7 > 1$

$\Rightarrow 3x < -8$ sau $3x > -6 \Rightarrow$

$x < -\frac{8}{3}$ sau $x > -2 \Rightarrow$

$x \in (-\infty; -\frac{8}{3}) \cup (-2; \infty)$

Exp 6: Rezolvați $|-3x+9| \geq 3$

E_1) $|-3x+9| \geq 3 \Rightarrow -3x+9 \leq -3$ sau $-3x+9 \geq 3$

$\Rightarrow -3x \leq -12$ sau $-3x \geq -6$

$\Rightarrow 3x \geq 12$ sau $3x \leq 6 \Rightarrow$

$x \geq 4$ sau $x \leq 2$

$\Rightarrow x \in (-\infty; 2] \cup [4; \infty)$

ECUAȚII CU MODULE

E_1) se egalează cantitatea din fiecare modul cu zero, se rezolvă

E_2) se face tabel de semne

E_3) se rezolvă ecuația în fiecare caz, se alege doar soluția care este în cazul respectiv $\Rightarrow S_I, S_{II}, S_{III}, \dots$

E_4) soluția finală este $S_f = S_I \cup S_{II} \cup \dots$

Exp. 1: Rezolvați $|5-x| - |3-x| = x+6$

E_1) $5-x=0 \Rightarrow x=5$

$3-x=0 \Rightarrow x=3$

E_2)

x		3		5	
$5-x$	$+++$	$+$	$+-+$	0	$---$
$3-x$	$+++$	0	$---$		$---$

E_3) Caz I: $x \in (-\infty; 3]$

$\Rightarrow (5-x)-(3-x) = x+6 \Rightarrow 5-x-3+x = x+6$

$\Rightarrow 2 = x+6 \Rightarrow x = -4 \in (-\infty; 3] \Rightarrow S_I = \{-4\}$

Caz II: $x \in (3; 5]$

$\Rightarrow (5-x)-(3-x) = x+6 \Rightarrow 8-2x = x+6 \Rightarrow -3x = -2$

$\Rightarrow x = \frac{2}{3} \in (3; 5] \Rightarrow S_{II} = \{\frac{2}{3}\}$

Caz III: $x \in (5, \infty)$

$\Rightarrow -(5-x)+(3-x) = x+6 \Rightarrow -5+x+3-x = x+6$

$\Rightarrow -2 = x+6 \Rightarrow x = -8 \notin (5; \infty) \Rightarrow S_{III} = \emptyset$

E_4) $S_f = S_I \cup S_{II} \cup S_{III} = \{-4; \frac{2}{3}\}$

INECUAȚII CU MODULE

E_1) se egalează cantitatea din fiecare modul cu zero, se rezolvă

E_2) se face tabel de semne

E_3) se rezolvă inecuația în fiecare caz, se aleg doar valorile care sunt în intervalul respectiv, adică intersectăm ce am obținut din rezolvare cu cazul respectiv

E_4) $S_f = S_I \cup S_{II} \cup \dots$

Exemplu: $|x+2| + |x+3| \leq 2x+7$

E_1) $x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$

E_2)

x		-3		-2	
$x+2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$ $+$ $+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$ $+$ $+$

E_3) Caz I: $x \in (-\infty, -3] \Rightarrow$

$-(x+2)-(x+3) \leq 2x+7 \Rightarrow$

$-x-2-x-3 \leq 2x+7$

$\Rightarrow -4x \leq 12 \mid :(-4) \Rightarrow x \geq -\frac{12}{4} = -3$

$\Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow x \in [-3, \infty)$

$S_I = [-3, \infty) \cap (-\infty, -3] = \{-3\}$

E_4) Caz II: $x \in (-3, -2] \Rightarrow$

$-(x+2)+(x+3) \leq 2x+7 \Rightarrow$

$-x-2+x+3 \leq 2x+7$

$\Rightarrow -2x \leq 8 \mid :(-2) \Rightarrow x \geq -4$

$\Rightarrow x \in [-4, \infty)$

$S_{II} = [-4, \infty) \cap (-3, -2] = (-3, -2]$

Caz III: $x \in (-2, \infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow (x+2)+(x+3) \leq 2x+7$

$\Rightarrow 2x+5 \leq 2x+7 \Rightarrow 5 \leq 7$ adev. pt

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$S_{III} = \mathbb{R} \cap (-2, \infty) = (-2, \infty)$

E_5) $S_f = S_I \cup S_{II} \cup S_{III} = [-3, \infty)$

Exemplu: $|-x+2| - |x+3| > 2x+3$

E_1) $-x+2=0 \Rightarrow x=2$

$x+3=0 \Rightarrow x=-3$

E_2)

x		-3		2	
$-x+2$	$+$	$+$	$+$	0	$-$ $-$ $-$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$ $+$ $+$

E_3) Caz I: $x \in (-\infty, -3] \Rightarrow$

$(-x+2)+(x+3) > 2x+3$

$5 > 2x+3 \Rightarrow -2x > -2 \mid :(-2)$

$\Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty, 1)$

$S_I = (-\infty, 1) \cap (-\infty, -3] = (-\infty, -3]$

E_4) Caz II: $x \in (-3, 2] \Rightarrow$

$(-x+2)-(x+3) > 2x+3$

$-2x-1 > 2x+3 \Rightarrow -4x > 4 \mid :(-4)$

$\Rightarrow x < 1 \Rightarrow x \in (-\infty, 1)$

$S_{II} = (-\infty, 1) \cap (-3, 2] = (-3, 1)$

E_5) Caz III: $x \in (2, \infty) \Rightarrow$

$-(-x+2)-(x+3) > 2x+3$

$x-2-x-3 > 2x+3$

$-2x > 8 \mid :(-2) \Rightarrow x < -4$

$\Rightarrow x \in (-\infty, -4)$

$S_{III} = (-\infty, -4) \cap (2, \infty) = \emptyset$

E_6) $S_f = S_I \cup S_{II} \cup S_{III}$

$\Rightarrow S_f = (-\infty, 1)$

PARTE ÎNTREAGĂ. PARTE FRACȚIONARĂ

a) partea întreagă a lui x este primul întreg mai mic sau egal cu x. Se notează $[x]$ și evident $[x]$ este număr întreg

b) partea fracționară a lui x se notează $\{x\}$ și vom avea: $\{x\} = x - [x]$

Exp.: $[2,3] = 2$; $[-2,3] = -3$; $[5] = 5$; $[-5] = -5$

Exp 2: $\{2,3\} = 2,3 - [2,3] = 2,3 - 2 = 0,3$

$\{-2,3\} = -2,3 - [-2,3] = -2,3 - (-3) = -2,3 + 3 = 0,7$

$\{5\} = 5 - [5] = 5 - 5 = 0$

Obs 1: $[x] \in \mathbb{Z}$ și $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

Obs. 2: $\{x\} \in [0;1)$ și $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

Exp: Calculați $[\sqrt{2009}] + 3 \cdot \{-\frac{1}{3}\}$

Pt. a găsi $[\sqrt{2009}]$, e suficient să găsim primul întreg $\leq \sqrt{2009}$. Pentru asta, calculăm $40^2 = 1600$; $50^2 = 2500$; $45^2 = 2025$; $44^2 = 1936$

$\Rightarrow 1936 < 2009 < 2025 \Rightarrow 44^2 < 2009 < 45^2 \,/\sqrt{\cdots}$

$\Rightarrow 44 < \sqrt{2009} < 45 \Rightarrow [\sqrt{2009}] = 44$

$\{-\frac{1}{3}\} = -\frac{1}{3} - [-\frac{1}{3}] = -\frac{1}{3} - (-1) = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow N = 44 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 44 + 2 = 46$

PROPRIETĂȚI PENTRU PARTE ÎNTREAGĂ ȘI PARTE FRACTIONARĂ

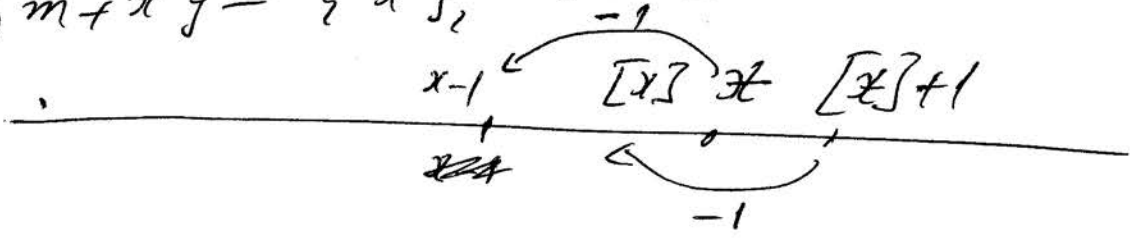
a) $[x] = x \iff x \in \mathbb{Z}$

b) $\{x\} = 0 \iff x \in \mathbb{Z}$

c) $[m+x] = m + [x], \ \forall m \in \mathbb{Z}$

d) $\{m+x\} = \{x\}, \ \forall m \in \mathbb{Z}$

e)



$\Rightarrow x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1$

$\Rightarrow$ se pot deduce: e$_1$) situarea părții întregi față de numere: $x - 1 < [x] \leq x$

e$_2$) situarea numărului față de partea întreagă, $[x] \leq x < [x]+1$

Obs: În cazul general, nu este proprietate că $[x+y] = [x] + [y]$, deși se poate numeri ca pentru anumite valori ale lui x și y să fie adevărată.

Exp: $[2+3,5] = 2 + [3,5] = 2+3 = 5$

Exp2: $x = 1,3 \Rightarrow$ $x - 1 < [x] \leq x < [x] + 1$ este echivalentă cu $0,3 < 1 \leq 1,3 < 2$ adev.

ECUAȚII CU PARTE ÎNTREAGĂ DE TIPUL $[f(x)]=g(x)$

E_1) notăm $[f(x)]=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow g(x)=k\Rightarrow$ îl găsim pe x în funcție de k

E_2) folosim proprietatea

$$[f(x)]\le f(x)<[f(x)]+1$$

$$\Rightarrow k\le f(x)\le k+1$$

E_3) îl înlocuim pe x găsit la E_1) în funcție de $k\Rightarrow k\le$ „Sct de k" $\le k+1\Rightarrow$ sistem de inecuații de unde găsim $k\in I$

E_4) $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in I\cap\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{\dots\}=M$

E_5) pentru a-l găsi pe x, folosim exprimarea lui x în funcție de k de la E_1

Exp: $\left[\frac{2x-7}{2}\right]=\frac{x-2}{3}$

E_1) not. $\left[\frac{2x-7}{2}\right]=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow \frac{x-2}{3}=k\Rightarrow x=3k+2$

E_2) folosim $\left[\frac{2x-7}{2}\right]\le\frac{2x-7}{2}<\left[\frac{2x-7}{2}\right]+1$

E_3) $\Rightarrow k\le\frac{2(3k+2)-7}{2}<k+1\ /\cdot 2$

$\Rightarrow 2k\le 6k-3<2k+2\Rightarrow\begin{cases}4k\ge 3\\4k<5\end{cases}\Rightarrow k\in\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)$

E_4) Dar, $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\left[\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right)\cap\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{1\}$

E_5) Din $x=3k+2\Rightarrow x=5$

IDENTITATEA LUI HERMITE

(N3)

a) pt 2 numere

$$[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$$

b) pt 3 numere

$$[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]$$

c) pt 4 numere

$$[x]+\left[x+\frac{1}{4}\right]+\left[x+\frac{2}{4}\right]+\left[x+\frac{3}{4}\right]=[4x]$$

d) în cazul general, pt n numere

$$[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]=[nx]$$

Exp 1: rezolvați ec.:

$$[x]+\left[x+\frac{1}{4}\right]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=8-\left[x+\frac{3}{4}\right]$$

E_1) ec este echivalentă cu

$$[x]+\left[x+\frac{1}{4}\right]+\left[x+\frac{1}{2}\right]+\left[x+\frac{3}{4}\right]=8$$

E_2) Dar, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}\Rightarrow\left[x+\frac{1}{2}\right]=\left[x+\frac{2}{4}\right]$

$\Rightarrow$ ec. devine

$$[x]+\left[x+\frac{1}{4}\right]+\left[x+\frac{2}{4}\right]+\left[x+\frac{3}{4}\right]=8$$

E_3) Din ident lui Hermite $\Rightarrow$

$$[4x]=8\Rightarrow 4x\in[8;9)$$

$$\Rightarrow 8\le 4x<9\ /:4\Rightarrow 2\le x<\frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow x\in\left[2;\frac{9}{4}\right)$$

Exp 2.: Rezolvați ec.:

$$\left[\frac{x+1}{3}\right]+\left[\frac{2x+5}{6}\right]=\frac{3x-5}{2}$$

E_1) Dacă notăm $t=\frac{x+1}{3}\Rightarrow$

$$\Rightarrow t+\frac{1}{2}=\frac{x+1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2x+5}{6}$$

E_2) Ec devine: $\left[\frac{x+1}{3}\right]+\left[\frac{x+1}{3}+\frac{1}{2}\right]=\frac{3x-5}{2}$

E_3) Din Hermite $\Rightarrow$

$$\left[\frac{x+1}{3}\right]+\left[\frac{x+1}{3}+\frac{1}{2}\right]=\left[2\cdot\frac{x+1}{3}\right]$$

$\Rightarrow$ ec. devine $\left[\frac{2x+2}{3}\right]=\frac{3x-5}{2}$

E_4) de aici e metoda clasică de rezolvare pt $[f(x)]=g(x)$

not $\left[\frac{2x+2}{3}\right]=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow\frac{3x-5}{2}=k$

$$\Rightarrow x=\frac{2k+5}{3}$$

E_5) Dar, $\left[\frac{2x+2}{3}\right]\le\frac{2x+2}{3}<\left[\frac{2x+2}{3}\right]+1$

$$\Rightarrow k\le\frac{2\cdot\frac{2k+5}{3}+2}{3}<k+1\ \Big|\cdot 3$$

$$3k\le\frac{4k+10}{3}+2<3k+3\ \Big|\cdot 3$$

$$9k\le 4k+10+6<9k+9$$

$$\Rightarrow\begin{cases}9k\le 4k+16\\4k+16<9k+9\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}5k\le 16\\5k>7\end{cases}\Rightarrow k\in\left(\frac{7}{5};\frac{16}{5}\right]$$

E_6) Dar, $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{2;3\}$

E_7) $k=2\Rightarrow x=\frac{9}{3}=3$

$k=3\Rightarrow x=\frac{11}{3}$

$$\Rightarrow x\in\left\{3;\frac{11}{3}\right\}$$

FORMULE DE CALCUL PRESCURTAT

- se memorează formula de bază, restul se adaptează ținând cont de regula semnelor la înmulțire

TIP I: $\boxed{(\pm a \pm b)^2}$

Formula de bază

1) $\boxed{(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2}$, se deduc

2) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

3) $(-a+b)^2 = a^2-2ab+b^2$

4) $(-a-b)^2 = a^2+2ab+b^2$

TIP II $\boxed{(\pm a \pm b)^3}$

Formula de bază

1) $\boxed{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$

2) $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

3) $(-a+b)^3 = -a^3+3a^2b-3ab^2+b^3$

4) $(-a-b)^3 = -a^3-3a^2b-3ab^2-b^3$

Obs.: ∃ forma restrânsă,

3') $(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b)$

4') $(a-b)^3 = a^3-b^3-3ab(a-b)$

TIP III $\boxed{(\pm a \pm b \pm c)^2}$

Formula de bază

1) $\boxed{(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca}$

2) $(a-b+c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

3) $(a-b-c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

4) $(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$

5) $(-a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ca$

6) $(-a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

etc

TIP IV $\boxed{a^n \pm b^n}$

1) $a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

2) $a^2+b^2 \Rightarrow \nexists$ formulă

3) $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

4) $a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$

5) $a^n-b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\dots+b^{n-1})$, formulă adev. $\forall n \in \mathbb{N}$

6) $a^n+b^n = (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\dots+b^{n-1})$ formulă adev $\forall n$ impar

Exp.: $(-3x(y^2+2x^2y)^2 =$

$= 9x^2y^4-12x^3y^3+4x^4y^2$

Exp 2: $8x^3-27x^6y^3 =$

$= (2x)^3-(3x^2y)^3 =$

$= (2x-3x^2y)(4x^2+6x^3y+9x^4y^2)$

Exp 3: $(x+2x^2y)(x^2-2x^3y+4x^4y^2) =$

$= (x+2x^2y)(x^2-x\cdot 2x^2y+(2x^2y)^2) =$

$= x^3+(2x^2y)^3 = x^3+8x^6y^3$

SUMA PUTERILOR PRIMELOR (N1)
n NUMERE NATURALE

$$\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1+1+\dots+1}_{n \text{ ori}} = n$$

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+\dots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Obs: $\sum_{k=1}^{n}(\alpha x_k + \beta y_k) = \alpha \sum_{k=1}^{n} x_k + \beta \sum_{k=1}^{n} y_k$

Ex1: Calculați $\sum_{k=1}^{n}(2k+3k^2)$

$$E_1)\ S = 2\sum_{k=1}^{n} k + 3\sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

$$= 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} + 3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= n(n+1) + \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} = n(n+1)\left[1+\frac{2n+1}{2}\right]$$

CALCULAREA SUMELOR DE FRACȚII

(N2)

met I: prelucrarea numărătorului (metoda gimnaziu, nu e generală)

E_1) Se scrie numărătorul fiecărui termen ca și diferența celor doi factori de la numitor

E_2) Se dă factor comun inversul acelei diferențe

E_3) Se desface fiecare termen al sumei în diferență de două fracții

E_4) Se reduc termenii, se aduce la cea mai simplă formă

met II: metoda coeficienților nedeterminați (e mai generală)

E_1) Se scrie suma ca sumă de termen general

E_2) Se descompune termenul general în sumă de fracții cu coeficienți nedeterminați (notați $A, B, C, \dots$)

E_3) Se aduc acești fracții la același numitor, se egalează numărătorii

E_4) Se rezolvă sistemul, se înlocuiește în termen general

E_5) Se dau valori lui k, se reduc termenii, se aduce la cea mai simplă formă

Exp 1: Calculați prin metoda prelucrării numărătorului suma

$$S=\frac{1}{3\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 13}+\dots+\frac{1}{(7n+3)(7n+10)}$$

E_1) $S=\frac{1}{7}\left(\frac{10-3}{3\cdot 10}+\frac{13-10}{10\cdot 13}+\dots+\frac{(7n+10)-(7n+3)}{(7n+3)(7n+10)}\right)$

E_2) $S=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{13}+\dots+\frac{1}{7n+3}-\frac{1}{7n+10}\right)$

$S=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7n+10}\right)\Rightarrow S=\frac{1}{7}\cdot\frac{7n+10-3}{3(7n+10)}$

$\Rightarrow S=\frac{1}{7}\cdot\frac{7(n+1)}{3(7n+10)}\Rightarrow S=\frac{n+1}{3(7n+10)}$

Exp 2: Calculați prin metoda coef. nedeterminați suma

$$S=\frac{1}{3\cdot 10}+\frac{1}{10\cdot 13}+\dots+\frac{1}{(7n+3)(7n+10)}$$

E_1) $S=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(7k+3)(7k+10)}$

E_2) $\frac{1}{(7k+3)(7k+10)}=\frac{A}{7k+3}+\frac{B}{7k+10}$

$\frac{1}{(7k+3)(7k+10)}=\frac{k(7A+7B)+10A+3B}{(7k+3)(7k+10)}$

E_3) $\begin{cases}7A+7B=0 \mid :7\\ 10A+3B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A+B=0 \mid \cdot 3\\ 10A+3B=1\end{cases}$

"$-$": $-7A=-1$

$\Rightarrow A=\frac{1}{7}$, $B=-\frac{1}{7}$

E_4) $\frac{1}{(7k+3)(7k+10)}=\frac{\frac{1}{7}}{7k+3}+\frac{-\frac{1}{7}}{7k+10}=$

$=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7k+3}-\frac{1}{7k+10}\right)$

E_5) $S=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{7}\left(\frac{1}{7k+3}-\frac{1}{7k+10}\right)=$

$=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{17}+\dots+\frac{1}{7n+3}-\frac{1}{7n+10}\right)$

$=\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{7n+10}\right)=\frac{1}{7}\cdot\frac{7n+10-3}{3(7n+10)}=$

$=\frac{1}{7}\cdot\frac{7(n+1)}{3(7n+10)}=\frac{n+1}{3(7n+10)}$

EGALITĂȚI DEMONSTRATE PRIN INDUCȚIE

(N2)

E1) Se scrie porțiunea cu puncte puncte în stg, se notează cu $P(n)$ propriet.

E2) se vf. $P(\text{prima val pt. n})$ adev

E3) se pp $P(k)$ adev $\overset{(?)}{\Rightarrow} P(k+1)$ adev unde $P(k)$: ...

$P(k+1)$: ...

E4) Știm $P(k)$ adev. $\Rightarrow$ scriem $P(k)$, apoi adunăm, scădem, înmulțim sau împărțim pentru a obține membrul cu punctele punctate din $P(k+1)$

E5) urmărim atenți ce ceea ce obținem „să plece" de unde pleacă $P(k+1)$, „să se oprească" unde se oprește $P(k+1)$ respectând regula șirului

E6) obținem $M_S(P(k+1)) = a$, scriem „Este suficient ca $a = M_d(P(k+1))$" (sau dacă obț $M_S(P(k+1)) = a$, scriem „Este suficient $a = M_d(P(k+1))$ și arăt. prin calcul $\Rightarrow P(k+1)$ adev $\Rightarrow P(n)$ adev., $\forall n$.

Obs.: Dacă șirul nu respectă o anumită regulă îl modificăm a.î. toți termenii să vf aceeași regulă

Exp 1.: Arătați că:

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}, \forall n \geq 1$$

I $P(1)$: $P(1)$: $\frac{1}{1\cdot 3} = \frac{1}{2+1}$ adev.

II P_k: $P(k)$ adev $\overset{(?)}{\Rightarrow} P(k+1)$ adev unde

$P(k)$: $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1}$

$P(k+1)$: $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}$

Știm $P(k)$ adev. $\Rightarrow$

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1} \Big| + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

Este suficient să arătăm că:

$$\frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} \Big| \cdot (2k+1)(2k+3)$$

$(2k+3)k+1 = (k+1)(2k+1) \Leftrightarrow$

$2k^2+3k+1 = 2k^2+3k+1$ adev $\Rightarrow P(k+1)$ adev $\Rightarrow P(n)$ adev., $\forall n \geq 1$

Exp 2: Arătați că:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{n+1} = 1, \forall n \geq 1$$

E1) termenii șirului din stg nu respectă aceeași regulă, scriem altfel

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

E2) de aici e inducție asemănătoare cu exemplul anterior

INDUCȚIE CU PASUL „k"

(N3)

Se folosește atunci când nu se poate demonstra că $P(k+1)$ este adevărată folosind doar $P(k)$

<u>ind cu pas 2:</u>

I P(primele 2 valori) adev

II Fie n. $P(k), P(k+1)$ adev $\overset{(?)}{\Rightarrow} P(k+2)$ adev.

Exp.: Fie $x_n = 3x_{n-1} + 5x_{n-2}$, $n \geq 2$

și că $x_0 = 5$, $x_1 = 10$.

Se cere $x_n \vdots 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Obs. că x_n depinde de 2 termeni anteriori

Fie $P(n): x_n \vdots 5$, $\forall n \in \mathbb{N}$

I $P(0): x_0 \vdots 5 \Leftrightarrow 5 \vdots 5$ adev.

$P(1): x_1 \vdots 5 \Leftrightarrow 10 \vdots 5$ adev

II Fie n. $P(k), P(k+1)$ adev. $\overset{(?)}{\Rightarrow} P(k+2)$ adev

unde $P(k): x_k \vdots 5$

$P(k+1): x_{k+1} \vdots 5$

$P(k+2): x_{k+2} \vdots 5$

Vrem să arăt. că $x_{k+2} \vdots 5$

Din $x_n = 3x_{n-1} + 5x_{n-2}$

$\Rightarrow x_{k+2} = 3x_{k+1} + 5x_k$

Din $P(k)$ adev $\Rightarrow x_k \vdots 5$, din

$P(k+1)$ adev $\Rightarrow x_{k+1} \vdots 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{k+2} = \underset{\vdots 5}{3x_{k+1}} + \underset{\vdots 5}{5x_k} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_{k+2} \vdots 5 \Rightarrow P(k+2)$ adev $\Rightarrow P(n)$ adev $\forall n \geq 0$

ind cu pas 3

I P(primele 3 valori) adev.

II Fie n. $P(k), P(k+1), P(k+2)$ adev. $\overset{(?)}{\Rightarrow}$

$P(k+3)$ adevărat.

INEGALITĂȚI DEMONSTRATE PRIN INDUCȚIE

(N3)

E_1) Se scrie proprietatea cu puncte înainte, înlocuind cu puncte în stânga, se notează $P(n)$ propoziția respectivă.

E_2) Se verifică P(prima valoare posibilă) adevărată.

E_3) Se presupune $P(k)$ adevărată $\overset{(?)}{\Longrightarrow} P(k+1)$ adevărată, unde

$P(k)$: ....

$P(k+1)$: ....

E_4) Știm $P(k)$ adevărată $\Rightarrow$ scriem $P(k)$, apoi adunăm, scădem, înmulțim sau împărțim pentru a obține membrul cu puncte puncte din $P(k+1)$

E_5) suntem atenți ca ceea ce obținem „să plece" de unde pleacă $P(k+1)$, „să se termine" unde se termină $P(k+1)$ respectând regula șirului

E_6) Obținem $M_S(P(k+1)) > a$, scriem „Este suficient ca $a \geq M_d(P(k+1))$" (sau dacă obț. $M_S(P(k+1)) < a$, scriem „Este suficient ca $a < M_d(P(k+1))$") și arătăm prin calcul $\Rightarrow$ $P(k+1)$ adevărată $\Rightarrow P(n)$ adevărată, $\forall n \in \ldots$

Exp. 1: arătați că:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1, \forall n \geq 1$$

E_1) not. $P(n)$: $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} > 1$, $\forall n \geq 1$

E_2) I $P(1)$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 \mid \cdot 12 \Leftrightarrow 6+4+3 > 12$ adev.

E_3) II Pp. $P(k)$ adev. $\overset{(?)}{\Longrightarrow} P(k+1)$ adev, unde

$P(k)$: $\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{3k+1} > 1$

$P(k+1)$: $\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+4} > 1$

E_4) Știm $P(k)$ adev. $\Rightarrow$

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{3k+1} > 1 \Big| - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \ldots + \frac{1}{3k+4} > 1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4}$$

E_5) E suficient să arătăm că

$$1 - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} > 1$$

$$\frac{-2}{3k+3} + \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+4} > 0 \Big| \cdot (3k+3)(3k+2)(3k+4)$$

$$\Leftrightarrow -2(3k+2)(3k+4) + (3k+3)(3k+4) + (3k+3)(3k+2) > 0$$

$$\Leftrightarrow -18k^2 - 36k - 16 + 9k^2 + 21k + 12 + 9k^2 + 15k + 6 > 0$$

$$\Leftrightarrow 2 > 0 \text{ adev.}$$

$\Rightarrow P(k+1)$ adev $\Rightarrow P(n)$ adev, $\forall n \geq 1$

Exp. 2: arătați că: $2^n \geq n^3$, $\forall n \geq 10$

E_1) not $P(n)$: $2^n \geq n^3$, $\forall n \geq 10$

E_2) I $P(10)$: $2^{10} \geq 10^3 (\Leftrightarrow 1024 \geq 1000$ adev

E_3) Pp. $P(k)$ adev $\overset{(?)}{\Longrightarrow} P(k+1)$ adev unde

$P(k)$: $2^k \geq k^3$

$P(k+1)$: $2^{k+1} \geq (k+1)^3$

E_4) Știm că $P(k)$ adev $\Rightarrow 2^k \geq k^3 \mid \cdot 2$

$\Rightarrow 2^{k+1} \geq 2k^3$

E_5) E suficient să arătăm că:

$2k^3 \geq (k+1)^3 (\Leftrightarrow 2k^3 \geq k^3 + 3k^2 + 3k + 1$

$\Leftrightarrow k^3 \geq 3k^2 + 3k + 1 \mid : k^2$

$\Leftrightarrow k \geq 3 + \frac{3}{k^2} + \frac{1}{k^3}$

E_6) Dar, $k \geq 10 \Rightarrow \frac{3}{k^2} \leq 1$, $\frac{1}{k^3} \leq 1$

$\Rightarrow 3 + \frac{3}{k^2} + \frac{1}{k^3} \leq 3+1+1 = 5$

și cum $k \geq 10 \Rightarrow$ relația

$k \geq 3 + \frac{3}{k^2} + \frac{1}{k^3}$ e adev., $\forall n \geq 10$

$\Rightarrow P(k+1)$ adev $\Rightarrow P(n)$ adev, $\forall n \geq 10$

DIVIZIBILITATE DEMONSTRATĂ PRIN INDUCȚIE (N3)

E_1) not. $P(n)$ prop cerută de forma $E(n) \vdots p$

E_2) I arăt P(prima val posib) că e adev.

II Pp. $P(k)$ adev $\overset{(?)}{\Rightarrow} P(k+1)$ adev

unde $P(k)$: ----

$P(k+1)$: ----

E_3) Știm $P(k)$ adev $\Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z}$ a.î. $M_3(P(k)) = p \cdot c$, găsim cea mai mare putere din $M_3(P(k))$ în fct de c, o înloc în $P(k+1)$ și vom obține $P(k+1)$ adev $\Rightarrow P(n)$ adev, $\forall n \geq$ ...

Obs.: din $M_3(P(k)) = p \cdot c$ nu trebuie neapărat cea mai mare putere, ci un termen oarecare

---

Exp 1: $(3^{2n} \cdot 7^n - 2^{3n} \cdot 5^n) \vdots 23, \forall n \geq 1$

E_1) not $P(n)$: $(3^{2n} \cdot 7^n - 2^{3n} \cdot 5^n) \vdots 23, \forall n \geq 1$

E_2) I $P(1)$: $(3^2 \cdot 7 - 2^3 \cdot 5) \vdots 23$

$\hookrightarrow (63 - 40) \vdots 23$ adev.

II Pp. $P(k)$ adev $\overset{(?)}{\Rightarrow} P(k+1)$ adev

unde $P(k)$: $(3^{2k} \cdot 7^k - 2^{3k} \cdot 5^k) \vdots 23$

$P(k+1)$: $(3^{2k+2} \cdot 7^{k+1} - 2^{3k+3} \cdot 5^{k+1}) \vdots 23$

E_3) Știm $P(k)$ adev $\Rightarrow (3^{2k} \cdot 7^k - 2^{3k} \cdot 5^k) \vdots 23$

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{Z}$ a.î. $3^{2k} \cdot 7^k - 2^{3k} \cdot 5^k = 23c$

$\Rightarrow 3^{2k} = \dfrac{23c + 2^{3k} \cdot 5^k}{7^k}$

E_4) înloc în $P(k+1) \Rightarrow$

$3^{2k+2} \cdot 7^{k+1} - 2^{3k+3} \cdot 5^{k+1} =$

$= 3^2 \cdot 3^{2k} \cdot 7^{k+1} - 2^{3k+3} \cdot 5^{k+1} =$

$= 3^2 \cdot \dfrac{23c + 2^{3k} \cdot 5^k}{7^k} \cdot 7^{k+1} - 2^{3k+3} \cdot 5^{k+1} =$

$= 9(23c + 2^{3k} \cdot 5^k) \cdot 7 - 2^{3k+3} \cdot 5^{k+1} =$

$= 9 \cdot 23c + 9 \cdot 2^{3k} \cdot 5^k \cdot 7 - 2^{3k+3} \cdot 5^{k+1} =$

$= 9 \cdot 23c + 2^{3k} \cdot 5^k (63 - 2^3 \cdot 5) =$

$= 9 \cdot 23c + 2^{3k} \cdot 5^k \cdot 23 =$

$= 23(9c + 2^{3k} \cdot 5^k) \vdots 23 \Rightarrow P(k+1)$ adev

$\forall n \geq 1$

MONOTONIA ȘIRURILOR (N3)

CRITERIUL DIFERENȚEI

- Se calculează $a_{n+1}-a_n$ și se compară cu 0, putând avea una din situațiile:

$a_{n+1}-a_n>0 \Rightarrow a_{n+1}>a_n \Rightarrow a_n$ s ↗

$a_{n+1}-a_n<0 \Rightarrow a_{n+1}<a_n \Rightarrow a_n$ s ↘

$a_{n+1}-a_n\geq 0 \Rightarrow a_{n+1}\geq a_n \Rightarrow a_n$ ↗

$a_{n+1}-a_n\leq 0 \Rightarrow a_{n+1}\leq a_n \Rightarrow a_n$ ↘

Obs.: dacă a_n s ↗ $\Rightarrow a_n$ ↗, reciproc nu, iar dacă dacă a_n s ↘ $\Rightarrow a_n$ ↘, reciproc nu

CRITERIUL RAPORTULUI

- se poate folosi doar dacă a_n are toți termenii pozitivi, se calculează $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ și se compară cu 1, putând avea una din situațiile:

$\frac{a_{n+1}}{a_n}>1 \Rightarrow a_{n+1}>a_n \Rightarrow a_n$ s ↗

$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1 \Rightarrow a_{n+1}<a_n \Rightarrow a_n$ s ↘

$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1 \Rightarrow a_{n+1}\geq a_n \Rightarrow a_n$ ↗

$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leq 1 \Rightarrow a_{n+1}\leq a_n \Rightarrow a_n$ ↘

Obs.: Pt a arăta că un șir NU E MONOTON este suficient să găsim trei termeni ordonați diferit

---

Exp 1: Fie $a_n=-2n+1$, $n\geq 1$, studiați monotonia lui a_n

E1) $a_{n+1}-a_n=\left(-2(n+1)+1\right)-(-2n+1)$

$=-2n-1+2n-1=-2<0$

E2) $a_{n+1}-a_n<0 \Rightarrow a_{n+1}<a_n$

$\Rightarrow a_n$ s ↘ $\Rightarrow a_n$ ↘

Exp 2: Fie $a_n=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)$, $n\geq 0$, studiați monot lui a_n

E1) deoarece a_n are toți termenii pozitivi, încercăm să folosim criteriul raportului

E2) $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2(n+1)+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2n+3)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}=2n+3>1 \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}>1$

$\Rightarrow a_{n+1}>a_n \Rightarrow a_n$ s ↗ $\Rightarrow a_n$ ↗

Exp 3: Fie $a_n=(-1)^n\cdot(2n+1)$, studiați monot. lui a_n, $n\geq 0$

E1) $a_0=(-1)^0\cdot 1=1$

$a_1=(-1)^1\cdot 3=-3$

$a_2=(-1)^2\cdot 5=5$

E2) Obs. că $a_0>a_1<a_2$

$\Rightarrow$ avem 3 termeni ordonați diferit $\Rightarrow a_n$ nu e monoton

MĂRGINIREA ȘIRURILOR (N3)

Un șir a_n este MĂRGINIT $\Leftrightarrow \exists m, M \in \mathbb{R}$ cu $m \leq a_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$

Un șir a_n <u>nu este mărginit</u> $\Leftrightarrow$ cel puțin la unul din capete nu este mărginit.

Obs 1: Pt a arăta că a_n este mărginit, intuim capetele și arătăm prin calcul că $m \leq a_n \leq M$

Obs 2: Dacă știm monotonia, deoarece avem deja unul din capete pt că dacă a_n s↑ $\Rightarrow a_n \geq a_0$ iar dacă a_n s↓ $\Rightarrow a_n \leq a_0$

Obs 3: Pt a arăta că a_n nu este mărginit, presupunem prin reducere la absurd că a_n este mărginit și vom obține din calcul că $n \leq \ldots$ adică n mărginit superior, ceea ce este o contradicție deoarece n este număr natural și el nu este mărginit superior

Obs 4: a_n nemărginit inferior $\Rightarrow \nexists m$ cu $m \leq a_n$

a_n nemărginit superior $\Rightarrow \nexists M$ cu $a_n \leq M$

Exp 1: Fie $a_n = \frac{1}{2n+1}$, $n \geq 1$

Studiați mărginirea lui a_n

E1) $a_1 = \frac{1}{3}$; $a_2 = \frac{1}{5}$; $a_3 = \frac{1}{7}$; ...

$\Rightarrow$ observăm că a_n descrescător cu prima valoare $a_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ probabil $a_n \leq \frac{1}{3}$

E2) arătăm prin calcul:

$a_n \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2n+1} \leq \frac{1}{3} \mid \cdot 3(2n+1) > 0$

$\Rightarrow 3 \leq 2n+1 \Leftrightarrow 2 \leq 2n \Leftrightarrow n \geq 1$ adev $\Rightarrow a_n \leq \frac{1}{3}$

E3) Din $a_n = \frac{1}{2n+1}$ și $n \geq 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow a_n$ are toți termenii pozitivi $\Rightarrow a_n > 0 \Rightarrow a_n \geq 0$

E4) Așadar, $0 \leq a_n \leq \frac{1}{3} \Rightarrow$ $\Rightarrow a_n$ mărginit

Exp 2: $a_n = 2n+1$, $n \geq 0$, studiați mărg lui a_n

E1) $a_0 = 1$, $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, ... $\Rightarrow$ probabil a_n s↑ și probabil $a_n \geq a_0 \Rightarrow a_n \geq 1$

E2) $a_n \geq 1 \Leftrightarrow 2n+1 \geq 1 \Leftrightarrow n \geq 0$ adev.

E3) Alg. că valorile lui a_n cresc și probabil e nemărginit superior

E4) prin (R.A.) $\exists M \in \mathbb{R}$ cu $a_n \leq M \Leftrightarrow 2n+1 \leq M \Leftrightarrow n \leq \frac{M-1}{2}$ și cum M fixat ar rezulta că n este mărginit superior, contradicție $\Rightarrow a_n$ nemărg superior $\Rightarrow a_n$ nemărginit

PROGRESII ARITMETICE (N1)

1) Fiecare termen se obține din precedentul adunând același număr notat r (rația)

2) termen general: $\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$

3) condiția ca trei numere să fie term. consecutivi ai unei p.a.:
$a+c=b+b \Leftrightarrow \boxed{a+c=2b}$

4) cond. ca un șir să fie p.a.:
$a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$

5) suma p.a. $\boxed{S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}}$

6) găsirea term general din sumă
$a_n = S_n - S_{n-1}$

7) cond. ca o sumă să fie sumă de p.a.: E1) $a_n = S_n - S_{n-1}$
E2) $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$

Exp 1: Se cere a_7 dacă $a_5 = 12$, $a_{19} = 40$

E1) $a_5 = 12 \Rightarrow a_1 + 4r = 12$
$a_{19} = 40 \Rightarrow a_1 + 18r = 40$

E2) scădem $\Rightarrow -14r = -28 \Rightarrow r = 2$

E3) înlocuim în $a_1 + 4r = 12 \Rightarrow a_1 = 4$

E4) $a_7 = a_1 + 6r = 4 + 6\cdot 2 = 16$

Exp 2: $x = ?$ dacă $2+x$, 3 și $x+6$ sunt termeni consecutivi ai p.a.

$(2+x) + (x+6) = 2\cdot 3 \Leftrightarrow 2x + 8 = 6$
$\Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$

Exp 3: verificați dacă $a_n = 2n+3$ este progr aritm

E1) Studiem dacă $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$

E2) $a_{n-1} = 2(n-1)+3 = 2n+1$
$a_{n+1} = 2(n+1)+3 = 2n+5$

E3) $a_{n-1} + a_{n+1} = (2n+1)+(2n+5) = 4n+6$
$2a_n = 2(2n+3) = 4n+6$
$\Rightarrow a_n$ p.a.

Exp 4: Calculați S_7 dacă $a_n = 2n+1$ este p.a.

E1) $S_7 = \frac{(a_1+a_7)\cdot 7}{2}$
$r = 2$; $a_7 = 2\cdot 7 + 1 = 15$

E3) $S_7 = \frac{(3+15)\cdot 7}{2} = 9\cdot 7 = 63$

Exp 5: Rezolvați: $1+5+9+\dots+x = 231$

E1) obs. că e sumă de p.a. cu $a_1 = 1$, $a_n = x$ și $r = 4 \Rightarrow S_n = \frac{(1+x)\cdot n}{2}$

E2) $x = a_n = a_1 + (n-1)r = 1 + (n-1)\cdot 4$
$\Rightarrow x = 4n - 3 \Rightarrow S_n = \frac{(1+4n-3)\cdot n}{2}$

E3) ec. devine:
$\frac{(4n-2)n}{2} = 231 \Rightarrow (2n-1)n = 231$
$\Leftrightarrow 2n^2 - n - 231 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1849}}{4}$
$\Rightarrow n_{1,2} = \frac{1 \pm 43}{4}$ $\swarrow^{11}$ $-\frac{42}{4} \notin \mathbb{N}$ $\Rightarrow n = 11$

E4) $x = 4n - 3 = 41$

Exp 6: Calculați $S = 1+4+7+\dots+100$

E1) S sumă p.a. cu $a_1 = 1$, $a_n = 100$, $r = 3$

E2) $a_n = 100 = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 100 = 1 + 3(n-1)$
$\Rightarrow n = 34 \Rightarrow S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2} = \frac{(1+100)34}{2}$
$\Rightarrow S_n = 1717$

Exp 7: Studiați dacă $S_n = n^2 + n$ este sumă de p.a.

E1) $a_n = S_n - S_{n-1} = n^2 + n - ((n-1)^2 + (n-1))$
$= n^2 + n - (n^2 - 2n + 1 + n - 1) = 2n$

E2) Studiem dacă $a_{n-1} + a_{n+1} = 2a_n$
$\Leftrightarrow 2(n-1) + 2(n+1) = 2\cdot 2n \Leftrightarrow$
$4n = 4n$ adev $\Rightarrow a_n$ p.a. $\Rightarrow$
S_n e sumă de p.a.

PROGRESII GEOMETRICE

1) fiecare termen se obține din precedentul înmulțind cu același număr nenul, notat cu q (rația)

2) termen general: $\boxed{b_n = b_1 \cdot q^{n-1}}$

3) condiția ca trei numere să fie term consecutivi ai unei progresii geometrice:

$a \cdot c = b \cdot b \Leftrightarrow \boxed{a \cdot c = b^2}$

4) cond. ca un șir să fie p. g.

$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = (b_n)^2$

5) suma p. g. $\boxed{S_n = \begin{cases} \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}, & q \neq 1 \\ n \cdot b_1, & q = 1 \end{cases}}$

6) găsirea term general din suma p. g.: $E_1)\ b_n = S_n - S_{n-1}$

$E_2)\ b_{n-1} \cdot b_{n+1} = (b_n)^2$

Exp 1.: Se cere b_7 dacă $b_2 = 5$ și $b_5 = 40$

$E_1)\ b_2 = 5 \Rightarrow b_1 \cdot q = 5$

$b_5 = 40 \Rightarrow b_1 \cdot q^4 = 40$

$E_2)$ împărțim $\Rightarrow \frac{b_1 q}{b_1 q^4} = \frac{5}{40} \Rightarrow \frac{1}{q^3} = \frac{1}{8}$

$\Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$

$E_3)$ înlocuim în $b_1 q = 5 \Rightarrow b_1 = \frac{5}{2}$

$E_4)\ b_7 = b_1 \cdot q^6 = \frac{5}{2} \cdot 2^6 = 5 \cdot 2^5 = 160$

Exp 2: Găsiți $x \in \mathbb{R}$ dacă x, 6 și $x-5$ sunt term. consec. p. g.

$E_1)\ x \cdot (x-5) = 6^2 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 36 = 0$

$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{2}$ $\begin{matrix} x_1 = 9 \\ x_2 = -4 \end{matrix}$

Exp 3.: Verificați dacă șirul $b_n = 2 \cdot 3^{n+1}$ este p. g.

$E_1)$ studiem dacă $b_{n-1} \cdot b_{n+1} = (b_n)^2$

$E_2)\ b_{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1+1} = 2 \cdot 3^n$

$b_{n+1} = 2 \cdot 3^{n+1+1} = 2 \cdot 3^{n+2}$

$E_3)\ b_{n-1} \cdot b_{n+1} = 2 \cdot 3^n \cdot 2 \cdot 3^{n+2} = 4 \cdot 3^{2n+2}$

$(b_n)^2 = (2 \cdot 3^{n+1})^2 = 4 \cdot 3^{2n+2} \Rightarrow b_n$ p. g.

Exp 4.: Arătați că $S \in (1;2)$ unde $S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2017}}$

$E_1)$ obs. că e sumă de p. g. cu $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$ și sunt 2018 termeni

$E_2)\ S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2018} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$

$\Rightarrow S_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2018} - 1}{-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2018}\right) =$

$= 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2017} \in (1;2)$

Exp 5: verificați dacă $S_n = n^2 + n$ este suma unei p. g.

$E_1)\ b_n = S_n - S_{n-1} = (n^2+n) - ((n-1)^2 + (n-1)) =$

$= n^2 + n - (n^2 - 2n + 1 + n - 1) = 2n$

$E_2)$ studiem dacă $b_{n-1} \cdot b_{n+1} = (b_n)^2$

$E_3)\ b_{n-1} = (n-1)^2 + (n-1)$ și $b_{n+1} = (n+1)^2 + (n+1)$

și înlocuind $\Rightarrow$

$((n-1)^2 + (n-1))((n+1)^2 + (n+1)) = [n^2+n]^2$

$\Leftrightarrow (n^2-n)(n^2+3n+2) = n^4 + 2n^3 + n^2$

$\Leftrightarrow n^4 + 3n^3 + 2n^2 - n^3 - 3n^2 - 2n =$

$= n^4 + 2n^3 + n^2$

$\Leftrightarrow -n^2 - 2n = n^2 \Leftrightarrow -2n^2 - 2n = 0$

Fals (ar trebui să fie adev., $\forall n \in \mathbb{N}$)

$\Rightarrow b_n$ nu e p. g $\Rightarrow S_n$ nu este sumă de p. g.

INEGALITĂȚI EVIDENTE

(N2)

1) $a>0 \Rightarrow a+\frac{1}{a} \geq 2$ cu egalitate $\Leftrightarrow a=1$

2) $a<0 \Rightarrow a+\frac{1}{a} \leq -2$ cu egalitate $\Leftrightarrow a=-1$

3) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$ cu egalitate $\Leftrightarrow a=b=c$

Exp 1: dacă $x, y, z>0$, arătați că: $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x} \geq 6$.
Când are loc egalitatea?

E1) $T_S = \underbrace{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}_{\geq 2}+\underbrace{\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)}_{\geq 2}+\underbrace{\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)}_{\geq 2}$

$\Rightarrow T_S \geq 6$ (deoarece $x, y, z>0$ implică $\frac{x}{y}, \frac{y}{z}$ și $\frac{z}{x}>0$)

E2) Egalitatea are loc $\Leftrightarrow$ $\frac{x}{y}=1$ și $\frac{y}{z}=1$ și $\frac{z}{x}=1$

$\Leftrightarrow x=y=z$

Exp 2. Rezolvați:

$$4^x+9^x+1=6^x+2^x+3^x$$

E1) $4^x+9^x+1=6^x+2^x+3^x \Leftrightarrow$

$(2^x)^2+(3^x)^2+1^2=2^x\cdot 3^x+2^x\cdot 1+3^x\cdot 1$

E2) dar, $(2^x)^2+(3^x)^2+1^2 \geq 2^x\cdot 3^x+2^x\cdot 1+3^x\cdot 1$

cu egalitate $\Leftrightarrow 2^x=3^x=1$

$\Leftrightarrow$ egalit are loc doar dacă $x=0$

INEGALITATEA MEDIILOR

(N3)

1) radical de ordin n:

$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$

Ex1: $\sqrt[3]{125} = y \Leftrightarrow y^3 = 125 \Leftrightarrow$

$y^3 = 5^3 \Rightarrow y = 5$

Ex2: $\sqrt[4]{81} = y \Leftrightarrow y^4 = 81 \Leftrightarrow$

$y^4 = 3^4 \Rightarrow y = 3$

2) inegalitatea trebuie știută

În cz general, definim mediile numerelor pozitive: $a_1, a_2, \dots, a_n$

media armonică

$$m_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

media geometrică

$$m_g = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

media aritmetică

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

3) **ineg mediilor este**

$\min(a_1, \dots, a_n) \le m_h \le m_g \le m_a \le \max(a_1, \dots, a_n)$

Obs.: de dincei se folosește față mîn și most și cu mediile înlocuite, adică:

a) pt 2 numere

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}$$

b) pt 3 numere

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \le \sqrt[3]{abc} \le \frac{a+b+c}{3}$$

c) pt 4 numere

$$\frac{4}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} \le \sqrt[4]{abcd} \le \frac{a+b+c+d}{4}$$

d) în cz general,

$$\frac{n}{\sum \frac{1}{a_i}} \le \sqrt[n]{\prod a_i} \le \frac{\sum a_i}{n}$$

Obs.: orice egalitate are loc în ineg mediilor $\Leftrightarrow$ toate numerele sunt egale

---

Ex4.: Rezolvați:

$3 \cdot 6^x - 8^x - 27^x = 1$

E_1) Ec este echivalentă cu

$3 \cdot 2^x \cdot 3^x = 8^x + 27^x + 1$

E_2) folosim $m_a \ge m_g \Rightarrow$

$$\frac{8^x + 27^x + 1}{3} \ge \sqrt[3]{8^x \cdot 27^x \cdot 1}$$

$$\Rightarrow \frac{8^x + 27^x + 1}{3} \ge \sqrt[3]{(2^x \cdot 3^x)^3}$$

$\Rightarrow 8^x + 27^x + 1 \ge 3 \cdot 6^x$

E_3) Din ecuație ar trebui ca

$8^x + 27^x + 1 = 3 \cdot 6^x \Rightarrow$ ar trebui să fie egalitate în ineg mediilor

$\Rightarrow$ toate numerele sunt egale

$\Rightarrow 8^x = 27^x = 1 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

INEGALITĂȚI, partea 1

(N4)

1) ineg evidente:

- dacă $a \cdot b > 0 \Rightarrow \boxed{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2}$ cu egalitate $\Leftrightarrow a = b$
- dacă $a \cdot b < 0 \Rightarrow \boxed{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2}$ cu egalitate $\Leftrightarrow a = -b$
- $\boxed{a \cdot b \leq \left(\frac{a+b}{4}\right)^2}$ cu egal $\Leftrightarrow a = b$
- $\boxed{a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca}$ cu egalit $\Leftrightarrow a = b = c$
- $\boxed{3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)}$ prima cu egalit $\Leftrightarrow a = b = c$
a 2-a cu egalit $\Leftrightarrow a = b = c$

2) ineg. mediilor

- $\boxed{\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$
- $\boxed{\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}}$

cu egalitate doar dacă toate numerele sunt egale

3) ineg SCHWARZ

$\boxed{a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}}$

cu egalit $\Leftrightarrow$ toate nr. sunt egale

4) ineg CAUCHY-BUNIAKOVSKY-SCHWARZ

$\boxed{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2)}$

cu egalit $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

6) ineg TITU ANDREESCU

$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} \geq \frac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$ cu egalit $\Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

7) ineg CEBÎȘEV:

8) ineg. CEBÎȘEV:

- dacă a_k și b_k la fel ordonate $\Rightarrow$ $\boxed{(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n) \leq n(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)}$
- dacă a_k și b_k invers ordonate $\Rightarrow$ $\boxed{(a_1 + \dots + a_n)(b_1 + \dots + b_n) \geq n(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)}$

cu egalitate dacă $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ sau $b_1 = b_2 = \dots = b_n$

9) ineg. BERNOULLI:

$\boxed{(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha}, \alpha \geq -1, n \geq 0$

10) ineg. MINKOVSKY

$\boxed{\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + \dots + b_n^2}}$

cu egalit $\Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

11) $\boxed{\frac{1}{a+b} \leq \frac{a+b}{4ab}}$ cu egalit pt $a = b$

12) $\boxed{(a_1 + \dots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2}$

13) $\boxed{(x^m + y^m)^2 \leq (x^p + y^p)(x^{2m-p} + y^{2m-p})}$, $p = \overline{1, n}$

(din CBS pt $\sqrt{x^p}$ și $\sqrt{x^{m-p}}$, respect pt $\sqrt{y^p}$...