Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(0,3\cdot 10-1)(0,3\cdot 10+1)=8$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-6x+m=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $x_1x_2(x_1+x_2)=12$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\sqrt{5-x}=\sqrt{x+10}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor cu 3 mai mare decât cifra unităților.

5p **5.** Determinați numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6**. Arătați că, dacă x este număr real pentru care $\sin x=\cos x$, atunci $\cos 2x=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix} a & 2b \\ -b & a \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1,1))=3$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a,b)\cdot A(b,a)=A\left(-ab,a^2+b^2\right)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi m și n pentru care $\det(A(m,n))=1$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-15X^2+mX-80$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=95$, arătați că $f(1)=1$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $x_1(x_1-x_2)+x_2(x_2-x_3)+x_3(x_3-x_1)=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați rădăcinile polinomului f, știind că acestea sunt numere reale în progresie aritmetică.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-10$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(0)=0$.

5p **b)** Demonstrați că oricare două tangente la graficul funcției f sunt concurente.

5p **c)** Demonstrați că $e^{x^3}\geq(x+1)\left(x^2-x+1\right)$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=x+\dfrac{9}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^3\left(f(x)-\frac{9}{x}\right)dx=4$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{2}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=9$ are aria egală cu $2\ln 3$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\left(f(x)-\frac{9}{x}\right)\operatorname{arctg}x\,dx=\frac{5\pi}{12}-\frac{3+\sqrt{3}-a}{2}$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(0,3\cdot 10-1)(0,3\cdot 10+1)=(3-1)(3+1)=$	**3p**
	$=2\cdot 4=8$	**2p**
2.	$x_1+x_2=6$, $x_1x_2=m$	**2p**
	$6m=12$, deci $m=2$	**3p**
3.	$4(5-x)=x+10\Rightarrow 20-4x=x+10\Rightarrow 5x=10$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 7 numere care au cifra zecilor cu 3 mai mare decât cifra unităților, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{7}{90}$	**1p**
5.	$\dfrac{a}{3}=\dfrac{a-1}{4}\Leftrightarrow 4a=3a-3$	**3p**
	$a=-3$	**2p**
6.	$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=$	**2p**
	$=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=0\cdot(\cos x+\sin x)=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1,1)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1,1))=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-(-1)\cdot 2=$	**3p**
	$=1+2=3$	**2p**
b)	$A(a,b)\cdot A(b,a)=\begin{pmatrix}a & 2b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & 2a\\ -a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab-2ab & 2a^2+2b^2\\ -b^2-a^2 & -2ab+ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}-ab & 2(a^2+b^2)\\ -(a^2+b^2) & -ab\end{pmatrix}=A(-ab,a^2+b^2)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$\det(A(m,n))=\begin{vmatrix}m & 2n\\ -n & m\end{vmatrix}=m^2+2n^2$	**2p**
	Cum m și n sunt numere întregi, din $m^2+2n^2=1$ obținem $m=-1$, $n=0$ sau $m=1$, $n=0$	**3p**
2.a)	$f=X^3-15X^2+95X-80\Rightarrow f(1)=1^3-15\cdot 1^2+95\cdot 1-80=$	**2p**
	$=1-15+95-80=1$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=15$ și $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=m$	**2p**
	$(x_1+x_2+x_3)^2-3(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=0\Leftrightarrow 225-3m=0$, deci $m=75$	**3p**

c)	$2x_2 = x_1 + x_3$ și $x_1 + x_2 + x_3 = 15 \Rightarrow x_2 = 5$	**2p**
	$x_1x_2x_3 = 80 \Rightarrow x_1x_3 = 16$ și, cum $x_1 + x_3 = 10$, polinomul f are rădăcinile 2, 5 și 8	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = e^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$	**3p**
	$f'(0) = e^0 - 1 = 0$	**2p**
b)	$f''(x) = e^x > 0$, pentru orice număr real $x \Rightarrow f'$ este strict crescătoare, deci f' este injectivă	**2p**
	Pentru orice numere reale x_1 și x_2, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f'(x_1) \neq f'(x_2)$, deci tangentele la graficul lui f în punctele de coordonate $(x_1, f(x_1))$ și $(x_2, f(x_2))$ au pante diferite, deci sunt concurente	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$	**1p**
	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$ și, cum $f(0) = -9$, obținem $f(x) \geq -9$, pentru orice număr real x	**2p**
	$f(x^3) \geq -9 \Rightarrow e^{x^3} \geq x^3 + 1$, deci $e^{x^3} \geq (x+1)(x^2 - x + 1)$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_1^3 \left(f(x) - \frac{9}{x}\right)dx = \int_1^3 \left(x + \frac{9}{x} - \frac{9}{x}\right)dx = \int_1^3 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big\|_1^3 =$	**3p**
	$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$	**2p**
b)	$g(x) = \frac{2x}{x^2+9} \Rightarrow \mathcal{A} = \int_1^9 \|g(x)\|dx = \int_1^9 \frac{2x}{x^2+9}dx = \ln(x^2+9)\Big\|_1^9 =$	**3p**
	$= \ln 90 - \ln 10 = \ln 9 = 2\ln 3$	**2p**
c)	$\int_1^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^2+1}{2}\right)' \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x\Big\|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2+1}{2(x^2+1)}dx = \left(\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}\right)\Big\|_1^{\sqrt{3}} =$	**3p**
	$= \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}$, de unde obținem $a = 4$	**2p**