Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $a_1=2$ și rația $r=3$. Calculați a_3.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Determinați numerele reale x pentru care $f(x^2)=9$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x+2}-3^{2x}=8$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie divizor al lui 100.

5p **5.** Se consideră un punct P în planul paralelogramului $ABCD$. Arătați că $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}12+a & a\\ 1+a & 3+a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=36$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a)-(12+a)I_2)=0$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Se consideră matricea $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $X\cdot X=A(0)$. Arătaţi că cel puţin un element al matricei X este număr irațional.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+\sqrt[3]{y}-2$.

5p **a)** Arătați că $1\circ 1=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $x\circ a=x$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x^6=4$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2\sqrt{x^2-1}$.

5p **a)** Arătaţi că $f'(x)=2x\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-f(x)}{x}$.

5p **c)** Demonstraţi că axa Ox este tangentă la graficul funcţiei f.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+2x+2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^2\left(f(x)+\frac{1}{x^2+2x+2}\right)dx=\frac{1}{2}\ln 5$.

5p **c)** Arătați că $\int_1^e\left(\frac{1}{f(x)}-2\right)\ln x\,dx=\frac{e^2+5}{4}$.

Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 6

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_3 = a_1 + 2r = 2 + 2 \cdot 3 =$	**3p**
	$= 8$	**2p**
2.	$2x^2 + 1 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 4$	**3p**
	$x = -2$ sau $x = 2$	**2p**
3.	$3^{2x}\left(3^2 - 1\right) = 8 \Leftrightarrow 3^{2x} = 1$	**3p**
	$x = 0$	**2p**
4.	Mulțimea A are 9 elemente, deci sunt 9 cazuri posibile	**2p**
	Divizorii din mulțimea A ai numărului 100 sunt 1, 2, 4 şi 5, deci sunt 4 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{4}{9}$	**1p**
5.	$ABCD$ este paralelogram și pentru $\{O\} = AC \cap BD$, obținem $\overrightarrow{PO} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC}\right)$	**3p**
	$\overrightarrow{PO} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}\right)$, deci $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$	**2p**
6.	$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x \cos\dfrac{\pi}{4} - \sin\dfrac{\pi}{4}\cos x + \cos x \cos\dfrac{\pi}{4} - \sin x \sin\dfrac{\pi}{4} =$	**2p**
	$= \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 0$, pentru orice număr real x	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(0)\right) = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12 \cdot 3 - 0 \cdot 1 =$	**3p**
	$= 36 - 0 = 36$	**2p**
b)	$A(a) - (12 + a) I_2 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 + a & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(a) - (12 + a) I_2\right) = \begin{vmatrix} 0 & a \\ 1 + a & -9 \end{vmatrix} = -a(1 + a)$	**3p**
	$a(1 + a) = 0$, de unde obţinem $a = 0$ sau $a = -1$	**2p**
c)	$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, deci $X \cdot X = A(0) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	**2p**
	Din $b(a + d) = 0$ şi $c(a + d) = 1$, rezultă $a + d \neq 0$ şi $b = 0$ şi, cum $d^2 + bc = 3$, obţinem $d^2 = 3$, deci d este număr iraţional	**3p**
2.a)	$1 \circ 1 = 1 + \sqrt[3]{1} - 2 =$	**3p**
	$= 1 + 1 - 2 = 0$	**2p**
b)	$x + \sqrt[3]{a} - 2 = x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$\sqrt[3]{a} = 2 \Leftrightarrow a = 8$	**3p**

c)	$x+\sqrt[3]{x^6}-2=4$, deci $x^2+x-6=0$	**3p**
	$x=-3$ sau $x=2$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\left(x^2\right)'-\left(2\sqrt{x^2-1}\right)'=2x-2\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=$	**3p**
	$=2x-\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}=2x\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right),\ x\in(1,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x}=$	**3p**
	$=2\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}=2$	**2p**
c)	$f(x)=0\Leftrightarrow x^2=2\sqrt{x^2-1}\Leftrightarrow x^4=4\left(x^2-1\right)\Leftrightarrow\left(x^2-2\right)^2=0\Leftrightarrow x^2=2$ şi, cum $x>1$, obţinem $x=\sqrt{2}$	**2p**
	$A\left(\sqrt{2},0\right)$ este punctul de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox și, cum panta tangentei la graficul funcției f în punctul A este $f'\left(\sqrt{2}\right)=0$, obținem că axa Ox este tangentă la graficul funcţiei f	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)f(x)\,dx=\int_0^1\left(x^2+2x+2\right)\dfrac{x}{x^2+2x+2}\,dx=\int_0^1 x\,dx=$	**2p**
	$=\dfrac{x^2}{2}\Big\vert_0^1=\dfrac{1}{2}$	**3p**
b)	$\int_0^2\left(f(x)+\dfrac{1}{x^2+2x+2}\right)dx=\int_0^2\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}\,dx=\dfrac{1}{2}\int_0^2\dfrac{\left(x^2+2x+2\right)'}{x^2+2x+2}\,dx=$	**2p**
	$=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2+2x+2\right)\Big\vert_0^2=\dfrac{1}{2}\ln 5$	**3p**
c)	$\int_1^e\left(\dfrac{1}{f(x)}-2\right)\ln x\,dx=\int_1^e\left(x+\dfrac{2}{x}\right)\ln x\,dx=\int_1^e x\ln x\,dx+2\int_1^e\dfrac{1}{x}\ln x\,dx=\int_1^e\left(\dfrac{x^2}{2}\right)'\ln x\,dx+2\int_1^e(\ln x)'\ln x\,dx=$	**3p**
	$=\dfrac{x^2}{2}\ln x\Big\vert_1^e-\int_1^e\dfrac{x^2}{2}\cdot\dfrac{1}{x}\,dx+2\cdot\dfrac{1}{2}\ln^2 x\Big\vert_1^e=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{x^2}{4}\Big\vert_1^e+\ln^2 e-\ln^2 1=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{e^2+5}{4}$	**2p**