Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numărul $a=\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$ este întreg, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați cel mai mare număr natural m pentru care soluțiile ecuației $x^2-7x+m=0$ sunt numere reale.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=117$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 36 de submulțimi cu două elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(3,-3)$ și $C(3,0)$. Determinați ecuația medianei din C a triunghiului ABC.

5p **6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\cos x\sin(\pi-x)-\sin x\cos(\pi+x)=1$.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ 3 & 2a-1 & 1\\ a-3 & a & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+ay+z=1\\ 3x+(2a-1)y+z=1\\ (a-3)x+ay+z=2a-1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-5$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.

5p **c)** Pentru $a=1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2=y_0z_0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5xy-5(x+y)+6$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=5(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x*x<26$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care $\frac{1}{n^2}*\frac{1}{(n+1)^2}*\frac{1}{(n+2)^2}=-19$.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y=x$.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Demonstrați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)}\,dt=x$.

M/2019
I/1

Arătați că numărul

$$a=\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2 \text{ este întreg}$$

E1) $a=\left(\frac{\overset{1+i}{1}}{1-i}-\frac{\overset{1-i}{1}}{1+i}\right)^2=\left(\frac{(1+i)-(1-i)}{(1-i)(1+i)}\right)^2=$

$$=\left(\frac{2i}{1^2-i^2}\right)^2=\left(\frac{2i}{2}\right)^2=i^2=-1\in\mathbb{Z}$$

M1/2019
II 2

Găsiți cel mai mare $m \in \mathbb{N}$ dacă ec $x^2 - 7x + m = 0$ are soluții reale

---

E_1) ec are soluții reale $\Leftrightarrow \Delta \geq 0$

$\Leftrightarrow 49 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow -4m \geq -49 \mid :(-4)$

$m \leq \frac{49}{4} \rightarrow m \in (-\infty; \frac{49}{4}]$ și $\frac{49}{4} = 12,\ldots$

E_2) cel mai mare $n \in \mathbb{N}$ din $(-\infty; \frac{49}{4}]$ este 12

V 2019
I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$3^x + 3^{x+1} + 3^{x+2} = 117$$

$E_1)$ $ex \Leftrightarrow 3^x + 3^x \cdot 3 + 3^x \cdot 9 = 117$

$\Leftrightarrow 3^x(1+3+9) = 117$

$\Leftrightarrow 3^x \cdot 13 = 117$

$3^x = \frac{117}{13} \Rightarrow 3^x = 9$

$E_2)$ $3^x = 3^2$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{x=2}$

$f(x) = 3^x$ e inj

V/2019
I/4

Găsiți numărul de elemente al unei mulțimi dacă aceasta are exact 36 submulțimi de două elemente

---

E_1) nr. de smț cu k elemente pt o mț cu n elemente este C_n^k

E_2) în cazul nostru, $C_n^2 = 36$

Cond: $n \in \mathbb{N}$
$n \geq 2$

E_3) $C_n^2 = 36 \Rightarrow \frac{n!}{2!(n-2)!} = 36 \Rightarrow \frac{(n-2)!(n-1)n}{2(n-2)!} = 36$

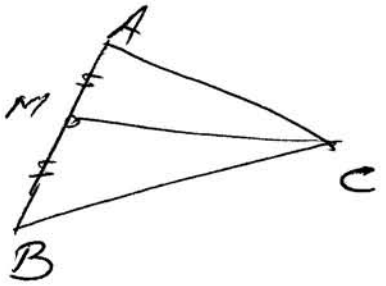
$\Leftrightarrow (n-1)n = 72 \Rightarrow n^2 - n - 72 = 0$

E_4) $n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+288}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{1 \pm 17}{2} \begin{cases} \frac{18}{2} = 9 \\ -\frac{16}{2} = -8 \end{cases}$

E_5) Dar, $n \in \mathbb{N}$ și $n \geq 2 \Rightarrow$ rămâne $\boxed{n = 9}$ soluție

V/2019

Fie $A(-1,1)$, $B(3,-3)$, $C(3,0)$, se cere ec. I/5 mediánei din C pentru triunghiul ABC



E_1) Fie M mijl lui AB

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \Rightarrow x_M = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \Rightarrow y_M = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow M(1,-1)$

E_2) știm $C(3,0)$ și $M(1,-1) \Rightarrow$ ec. CM este

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 0 + y - 3 - 0 + x - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x - 2y - 3 = 0}$$

M1/2019
I16

Găsiți $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ a.î.

$$\cos x(\sin(\pi - x) - \sin x \cos(\pi + x) = 1$$

$E_1)$ $\sin(\pi - x) = \underbrace{\sin \pi}_{0} \cos x - \underbrace{\cos \pi}_{-1} \sin x = \sin x$

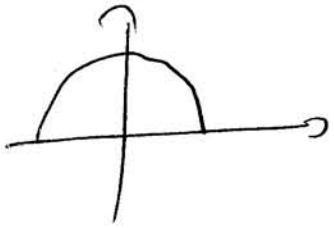
$\cos(\pi + x) = \underbrace{\cos \pi}_{-1} \cos x - \underbrace{\sin \pi}_{0} \sin x = -\cos x$

$E_2)$ ec $\Leftrightarrow \cos x \sin x + \sin x \cos x = 1$

$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = 1$

$\Leftrightarrow \sin 2x = 1$

$E_3)$ $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 2x \in (0; \pi)$



$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \overset{\text{ec}}{\Rightarrow} 2x = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & 2a-1 & 1 \\ a-3 & a & 1 \end{pmatrix}$,

arătați că $\det(A(0))=-5$

$E_1)$ $\det(A(0))=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-2+0+0-3-0-0=-5$

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & 2a-1 & 1 \\ a-3 & a & 1 \end{pmatrix}$

Găsiți $a \in \mathbb{R}$ dacă $\det(A(a))=0$

$E_1)$ $\det(A(a))=\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 3 & 2a-1 & 1 \\ a-3 & a & 1 \end{vmatrix} =$

$= 2(2a-1)+a(a-3)+3a-(a-3)(2a-1)-3a-2a=$

$= 4a-2+a^2-3a+3a-(2a^2-a-6a+3)-5a$

$= a^2+4a-2-2a^2+7a-3-5a$

$= -a^2+6a-5$

$E_2)$ $\det(A(a))=0 \Rightarrow -a^2+6a-5=0 \mid \cdot(-1)$

$\Rightarrow a^2-6a+5=0$

$\Rightarrow a_{1,2}=\frac{6 \pm \sqrt{36-20}}{2 \cdot 1}=\frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} 5 \\ 1 \end{cases}$

$\Rightarrow a \in \{1; 5\}$

M1/2019
II 1 c)

Fie $\begin{cases} 2x + ay + z = 1 \\ 3x + (2a-1)y + z = 1 \\ (a-3)x + ay + z = 2a-1 \end{cases}$

Dacă $a=1$, se cer soluțiile (x_0, y_0, z_0) cu

$$x_0^2 = y_0 z_0$$

$E_1)$ $a=1 \Rightarrow \begin{cases} 2x+y+z=1 & (1) \\ 3x+y+z=1 & (2) \\ -2x+y+z=1 & (3) \end{cases}$

$E_2)$ $\det S = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{C_2=C_3}{=\!=} 0 \Rightarrow$ nu putem folosi Cramer

$E_3)$ Scăzând primele 2 ecuații

$\Rightarrow x=0$, înlocuim în sistem

$\Rightarrow \begin{cases} y+z=1 \\ y+z=1 \\ y+z=1 \end{cases} \Rightarrow y+z=1 \Rightarrow$ nu pot calcula pe y sau pe z

$E_4)$ Soluțiile sunt (x_0, y_0, z_0) cu

$$x_0 = 0 \text{ și } y_0 + z_0 = 1$$

$E_5)$ dar, din ip $\Rightarrow x_0^2 = y_0 z_0$

$$\Rightarrow 0 = y_0 z_0 \Rightarrow y_0 z_0 = 0$$

$E_6)$ Avem $\begin{cases} y_0 + z_0 = 1 & (4) \\ y_0 z_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_0 = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} z_0 = 1 \\ \text{sau} \\ z_0 = 0 \overset{(4)}{\Rightarrow} y_0 = 1 \end{cases}$

Soluțiile sunt $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 1 \end{cases}$ sau $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \\ z_0 = 0 \end{cases}$

19/2019
II (20)

Fie $x * y = 5xy - 5(x+y) + 6$

Arătați că $x * y = 5(x-1)(y-1) + 1$

E_1) Calculăm $5(x-1)(y-1)+1 = 5(xy - x - y + 1) + 1 =$

$= 5xy - 5x - 5y + 6 =$

$= 5xy - 5(x+y) + 6 = x * y$

M1/2019

Fie $x*y=5xy-5(x+y)+6$, se știe că $x*y=5(x-1)(y-1)+1$, x cel vechile legi x

II 2b)

dacă $x*x*x<26$

$E_1)$ $x*y=5(x-1)(y-1)+1 \Rightarrow$

$x*x=5(x-1)^2+1$

$E_2)$ $x*x*x=(x*x)*x=\left(5(x-1)^2+1\right)*x=$

$=5\left(5(x-1)^2+1-1\right)(x-1)+1=$

$=5\cdot 5(x-1)^3+1=25(x-1)^3+1$

$E_3)$ inec devine $25(x-1)^3+1<26$

$\Leftrightarrow 25(x-1)^3<25 \Leftrightarrow (x-1)^3<1 \;/\sqrt[3]{\cdots}$

$x-1<1 \Rightarrow x<2$

$\Rightarrow x\in(-\infty;2)$

M/2019
XI.01

Fie $x*y = 5xy - 5(x+y) + 6$, să se arate că
$x*y = 5(x-1)(y-1)+1$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ are

$$\frac{1}{n^2} * \frac{1}{(n+1)^2} * \frac{1}{(n+2)^2} = -19$$

E_1) folosim $x*y = 5(x-1)(y-1)+1$ avem

$$\frac{1}{n^2} * \frac{1}{(n+1)^2} * \frac{1}{(n+2)^2} = -19 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(5\left(\frac{1}{n^2}-1\right)\left(\frac{1}{(n+1)^2}-1\right)+1\right) * \frac{1}{(n+2)^2} = -19 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\cdot\left(5\left(\frac{1}{n^2}-1\right)\left(\frac{1}{(n+1)^2}-1\right)+1-1\right)\left(\frac{1}{(n+2)^2}-1\right)+1 = -19$$

$$\Leftrightarrow 25\left(\frac{1}{n^2}-1\right)\left(\frac{1}{(n+1)^2}-1\right)\left(\frac{1}{(n+2)^2}-1\right) = -20$$

E_2) $n \searrow \Rightarrow n^2 \searrow \Rightarrow \frac{1}{n^2} \searrow \Rightarrow \left(\frac{1}{n^2}-1\right) \searrow$

Analog, $\left(\frac{1}{(n+1)^2}-1\right) \searrow$ și $\left(\frac{1}{(n+2)^2}-1\right) \searrow$

$$\Rightarrow f(n) = 25\left(\frac{1}{n^2}-1\right)\left(\frac{1}{(n+1)^2}-1\right)\left(\frac{1}{(n+2)^2}-1\right) \searrow$$

$\Rightarrow$ ec $f(n) = -20$ are cel mult o soluție

E_3) $f(1) = 0 \neq -20$, $f(2) = 25\left(\frac{1}{4}-1\right)\left(\frac{1}{9}-1\right)\left(\frac{1}{16}-1\right) \neq -20$

$f(3) = 25\left(\frac{1}{9}-1\right)\left(\frac{1}{16}-1\right)\left(\frac{1}{25}-1\right) = 25\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)\left(-\frac{15}{16}\right)\left(-\frac{24}{25}\right) = -20$

$\Rightarrow n=3$ e soluție

Cum $f(n) \searrow$

$\Rightarrow n=3$ soluție unică

M/2019
III 1a)

Fie $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x}$

Se cere $f'(x) = \frac{x-2}{x^2}$

E1) $f'(x) = \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{(x-1)' x - (x-1) x'}{x^2}$

$f'(x) = \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{x - x + 1}{x^2}$

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} = \frac{x-2}{x^2}$

M1/2019

Fie $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x}$, x cere abscisa $\in (1,6)$ pct de pe G_f în care tangenta la G_f este perpendiculară pe dreapta $y = x$, știind că

$$f'(x) = \frac{x-2}{x^2}, \quad f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$$

E_1) $tg \perp d \Leftrightarrow m_{tg} \cdot m_d = -1$ $\Big\} \Rightarrow m_{tg} = -1$

E_2) $d: y = x \Rightarrow m_d = 1$

E_3) Dar, pct $\in$ $\Rightarrow m_{tg} = f'(\alpha)$

$$\Rightarrow f'(\alpha) = -1 \Rightarrow \frac{\alpha - 2}{\alpha^2} = -1 \Rightarrow \alpha - 2 = -\alpha^2$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 \\ \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

E_4) Dar, $A_f = (0,\infty) \Rightarrow \boxed{\alpha = 1}$

M/2019
III 1c)

Fie $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x}$, $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$

Se știe că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$, și că $f(\frac{\pi}{2})<0$

E1) $f'(x)=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2\in A_f$

E2)

x	0		2	
f'	‖	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$
f	‖ ↘		$\ln 2-1$	↗

$f(2)=\ln 2-\frac{2\cdot 1}{2}=\ln 2-1=\ln 2-\ln e<0$

$f(1)=\ln 1-\frac{2\cdot 0}{1}=0-0=0$

$\Rightarrow$

x	0		1		$\frac{\pi}{2}$		2	
f'	‖	$-\ -\ -$	0		$-\ -$	0	$+\ +$	$+$
f	‖ ↘		0	↘			$\ln 2-1$	↗

E3) $\frac{\pi}{2}=\frac{3,17...}{2}\in(1;2)$

$f_{|_1}\searrow$ pe $(1;\infty)$

$f(1)=0$

$\Big\}$ Rolle $\Rightarrow f(\frac{\pi}{2})<0$

Εἰ $f(x) = x^2 + 1$, νὰ δειχθεῖ ὅτι $\int_0^3 f(x)dx = 12$

$E_1)$ $I = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 (x^2+1)dx =$

$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 + x\Big|_0^3 = \frac{1}{3}(27-0) + (3-0) =$

$= 9 + 3 = 12$

M1/2019

Fie $f(x) = x^2+1$, $\mathcal{A}$ cea arie delimitată (pct 2 b)

G_g, dreptele $x=0$, $x=1$ și Ox pentru $g(x) = \frac{x}{f(x)}$

$$\left.\begin{array}{l} E_1)\ \mathcal{A} = \int_0^1 |g(x)|\,dx = \int_0^1 \left|\frac{x}{x^2+1}\right| dx \\ E_2)\ x \in [0;1] \Rightarrow \frac{x}{x^2+1} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathcal{A} = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+1|_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2$$

M (2019 II 2 c)

Fie $f(x)=x^2+1$, arătați că $\exists$ unic $x\in\mathbb{R}$ cu $\int_0^x e^{f(t)}dt=x$

E_1) ec. $\int_0^x e^{f(t)}dt=x \Leftrightarrow \int_0^x e^{f(t)}dt-x=0$

E_2) notăm $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\int_0^x e^{f(t)}dt-x$,

găsim numărul de rădăcini pt $g(x)=0$

E_3) $g'(x)=\left(\int_0^x e^{f(t)}dt-x\right)'=e^{f(x)}-1=$

$=e^{x^2+1}-1$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x^2+1}=1 \Leftrightarrow x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=-1$

fals $\Rightarrow g'(x)=0$ nu are rad reale

și $g(0)=e^1-1>0 \Rightarrow g_s\nearrow$ pe $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ g are cel mult o soluție reală

x						
g'	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
g	$\nearrow$					

Dar că $g(0)=\int_0^0 e^{f(t)}dt-0=0$, $g_s\nearrow \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x)=0$ are soluție unică pe $\mathbb{R}$