Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați al doilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=7$ și $a_3=15$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+2$. Determinați numerele naturale n, pentru care $f(n)<8$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-1}=x+1$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreptele $d_1: y=\frac{x}{2}+2$ și $d_2: y=(m-3)x+1$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, pentru care dreptele d_1 și d_2 sunt perpendiculare.

5p **6.** Arătați că, dacă $\sin 2x=\frac{1}{2}$, atunci $(\sin x+\cos x)^2=\frac{3}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $X(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ 9b & a \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(X(3,1))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $X(a,b)X(c,d)=X(ac+9bd,ad+bc)$, pentru orice numere reale a, b, c și d.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi (m,n) pentru care $\det(X(m,n))=1$.

2. Se consideră polinomul $f=2X^3-4X^2-7X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=9$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu $X+\sqrt{2}$.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că suma a două rădăcini ale polinomului f este egală cu 1.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=xe^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\sqrt[n]{e}\leq\frac{n}{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

2. Se consideră funcția $f:[2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x-2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x+2)}{x+2}\cdot\sqrt{e^x}$ este egal cu π.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt}{x^2}$.

V3/208

Găsiți a_3 pt p.a. dacă $a_1 = 7$ și $a_3 = 15$

met I

E_1) $a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow$

$15 = 7 + 2r \Rightarrow 8 = 2r \Rightarrow \boxed{r = 4}$

E_2) $a_1 = 7$, $r = 4$ și $a_2 = a_1 + r \Rightarrow a_2 = 7 + 4$

$\Rightarrow \boxed{a_2 = 11}$

---

met II : $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} \Rightarrow a_2 = \frac{7+15}{2} \Rightarrow a_2 = 11$

2018/V 3

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+2$, se cere nr. naturale n dacă $f(n)<8$

E1) $f(n)<8 \Rightarrow 3n+2<8 \Rightarrow 3n<6 \Rightarrow n<2$ $(*)$

E2) Dar, $n\in\mathbb{N} \overset{(*)}{\Rightarrow} n\in\{0;1\}$

V3/2018
I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x^2-1}=x+1$$

E_1) $\sqrt{x^2-1}=x+1 \mid (\,)^2$

$x^2-1=(x+1)^2 \Rightarrow x^2-1=x^2+2x+1$

$\Rightarrow -2=2x \Rightarrow x=-1$ soluție posibilă

E_2) o verific în ecuație

$\Rightarrow \sqrt{(-1)^2-1}=-1+1 \Leftrightarrow \sqrt{0}=0$ adev

$\Rightarrow x=-1$ soluție

1/3/2018
I/4

Găsiți nr. submulțimilor cu 3 elemente pt $\{0;1;2;3;4\}$

---

met I:

nu contează ordinea $\Rightarrow C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{20}{2} = 10$

met II:

scriem toate submulțimile și le numărăm

$\{0;1;2\}$; $\{0;1;3\}$; $\{0;1;4\}$; $\{0;2;3\}$; $\{0;2;4\}$; $\{0;3;4\}$;

$\{1;2;3\}$; $\{1;2;4\}$; $\{1;3;4\}$; $\{2;3;4\}$

$\Rightarrow$ 10 submulțimi

V3/2018
3/5

Fie $d_1: y = \frac{x}{2} + 2$ și $d_2: y = (m-3)x + 1$

se cere $m = ?$, $m \in \mathbb{R}$ dacă $d_1 \perp d_2$

---

met I:

$E_1)$ $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

$E_2)$ dacă $y = ax + b \Rightarrow m_d = a$

$\Rightarrow m_{d_1} = \frac{1}{2}$, $m_{d_2} = m - 3$

$E_3)$ $m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1 \Rightarrow \frac{1}{2}(m-3) = -1 \Rightarrow m - 3 = -2$

$\Rightarrow m = 1$

---

met II:

$E_1)$ $d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

$E_2)$ dacă $d: ax + by + c = 0 \Rightarrow m_d = -\frac{a}{b}$

$\Rightarrow d_1: y = \frac{x}{2} + 2 \Rightarrow \frac{x}{2} - y + 2 = 0 \Rightarrow m_{d_1} = -\frac{\frac{1}{2}}{-1} = \frac{1}{2}$

$d_2: y = (m-3)x + 1 \Rightarrow (m-3)x - y + 1 = 0 \Rightarrow m_{d_2} = -\frac{m-3}{-1} = m - 3$

$E_3)$ $m_{d_1} \cdot m_{d_2} = -1 \Rightarrow \frac{1}{2}(m-3) = -1 \Rightarrow m - 3 = -2$

$\Rightarrow m = 1$

V3/2018

I/6

Dacă $\sin 2x = \frac{1}{2}$, arătați că:

$$(\sin x + \cos x)^2 = \frac{3}{2}$$

$E_1)$ $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x =$

$= 1 + 2\sin x \cos x$

$E_2)$ Dar, $2\sin x \cos x = \sin 2x \xrightarrow{\text{în}} \frac{1}{2}$

$\Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Fie $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 9b & a \end{pmatrix}$, arătați că

$\det(X(3,1)) = 0$

E,) $\det(X(3,1)) = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 9 = 0$

V3/2018
II 16)

Fie $X(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ 9b & a \end{pmatrix}$, arătați că

$$X(a,b)X(c,d)=X(ac+9bd,\ ad+bc)$$

$E_1)$ $X(a,b)X(c,d)=\begin{pmatrix} a & b \\ 9b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 9d & c \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} ac+9bd & ad+bc \\ 9bc+9ad & 9bd+ac \end{pmatrix} \quad (1)$$

$E_2)$ $X(ac+9bd,\ ad+bc)=\begin{pmatrix} ac+9bd & ad+bc \\ 9(ad+bc) & ac+9bd \end{pmatrix}$ (2)

$E_3)$ din (1) + (2) $\Rightarrow$ egalitate

15/2018

Fie $X(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ 9b & a \end{pmatrix}$, găsiți perechile II 1c)
de numere întregi (m,n) dacă $\det(X(m,n))=1$

$E_1)$ $\det(X(m,n))=\begin{vmatrix} m & n \\ 9n & m \end{vmatrix}=m^2-9n^2$

$E_2)$ $\det(X(m,n))=1 \Rightarrow m^2-9n^2=1 \Rightarrow (m-3n)(m+3n)=1$ (*)

$E_3)$ $m,n\in\mathbb{Z} \Rightarrow \begin{cases} m-3n\in\mathbb{Z} \\ m+3n\in\mathbb{Z} \end{cases} \overset{(*)}{\Rightarrow}$ avem cazurile

Caz I: $\begin{cases} m-3n=1 \\ m+3n=1 \end{cases}$

„+": $2m=2 \Rightarrow m=1$, înlocuim $\Rightarrow 1-3n=1 \Rightarrow n=0$

Caz II: $\begin{cases} m-3n=-1 \\ m+3n=-1 \end{cases}$

„+": $2m=-2 \Rightarrow m=-1$, înlocuim $\Rightarrow -1-3n=-1 \Rightarrow n=0$

$E_4)$ $\begin{cases} m=1 \\ n=0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} m=-1 \\ n=0 \end{cases}$

V3/2018

I 2 0)

Fie $f = 2x^3 - 4x^2 - 7x + m$

Dt $m = 9$, se cere $f(1) = 0$

$E_1)$ $m = 9 \Rightarrow f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 7x + 9$

$E_2)$ $f(1) = 2 - 4 - 7 + 9 \Rightarrow f(1) = -9 + 9 \Rightarrow f(1) = 0$

V3/2018
Σ = 6)

Fie $f = 2x^3 - 4x^2 - 7x + m$

Se cere $m = ?$, $m \in \mathbb{R}$ dacă $f \vdots (x+\sqrt{2})$

E_1) Folosim $f \vdots (x-a) \Leftrightarrow f(a) = 0$ și

$f \vdots (x+a) \Leftrightarrow f(-a) = 0$

E_2) $f \vdots (x+\sqrt{2}) \Leftrightarrow f(-\sqrt{2}) = 0$

$$f(-\sqrt{2}) = 2(-\sqrt{2})^3 - 4(-\sqrt{2})^2 - 7(-\sqrt{2}) + m$$

$$f(-\sqrt{2}) = 2(-2\sqrt{2}) - 4 \cdot 2 + 7\sqrt{2} + m$$

$$f(-\sqrt{2}) = -4\sqrt{2} - 8 + 7\sqrt{2} + m$$

$$f(-\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - 8 + m$$

E_3) $f(-\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{2} - 8 + m = 0$

$$\Rightarrow \boxed{m = 8 - 3\sqrt{2}}$$

V 3/2018

II 2c)

Fie $f = 2X^3 - 4X^2 - 7X + m$, $m \in \mathbb{R}$

Găsiți m dacă suma a două rad ale lui f este 1

E_1) $x_1 + x_2 = 1$, dar din VIETE

$$\Rightarrow S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$$

$$\Rightarrow 1 + x_3 = -\frac{-4}{2} \Rightarrow 1 + x_3 = 2 \Rightarrow \boxed{x_3 = 1}$$

E_2) x_3 rad $\Rightarrow f(x_3) = 0$

Dar, $x_3 = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow 2 - 4 - 7 + m = 0$

$$\Rightarrow -9 + m = 0 \Rightarrow \boxed{m = 9}$$

Fie $f(x)=(x-1)e^x+1$, arătați că

$$f'(x)=xe^x$$

E1) $f'(x)=\left((x-1)e^x+1\right)'=$

$=(x-1)'e^x+(x-1)(e^x)'+0$

$=1\cdot e^x+(x-1)e^x=(1+x-1)e^x=xe^x$

V 3 bac

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x+1$ — II, 1, b)

Se cere ec asimpt oriz. spre $-\infty$ a G_f

E_1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left((x-1)e^x+1\right)\overset{-\infty\cdot e^{-\infty}+1}{\underset{-\infty\cdot 0+1}{=\!=}}$ cos

exceptat

E_2) notăm $t=-x$ și cum $x\to-\infty\Rightarrow t\to\infty$

$$l=\lim_{t\to\infty}\left((-t-1)e^{-t}+1\right)=\lim_{t\to\infty}\left(\frac{-t-1}{e^t}+1\right)$$

E_3) fie $l_1=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{-t-1}{e^t}\overset{\frac{-\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=\!=}}\lim\limits_{t\to\infty}\frac{-1}{e^t}\overset{\frac{-1}{\infty}}{=\!=}0$

$\Rightarrow l=0+1\Rightarrow l=1\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow y=1$ as. oriz spre $-\infty$

13/2018

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x+1$, să se

$$\sqrt[n]{e}\le\frac{n}{n-1},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\ge 2$$

E_1) Conclusia $\sqrt[n]{e}\le\frac{n}{n-1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\ge 2$ este

echivalentă cu $(n-1)\sqrt[n]{e}\le n\hookrightarrow$

$$(n-1)e^{\frac{1}{n}}\le n\ /:n>0$$

$$\hookrightarrow\frac{n-1}{n}e^{\frac{1}{n}}\le 1\hookrightarrow\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{\frac{1}{n}}-1\le 0\ /\cdot(-1)$$

$$\hookrightarrow\left(\frac{1}{n}-1\right)e^{\frac{1}{n}}+1\ge 0\quad(*)$$

E_2) ne este sugerat să studiem semnul lui $f(\frac{1}{n})$

E_3) $f'(x)=\left((x-1)e^x+1\right)'=1\cdot e^x+(x-1)e^x+0=$

$$=(1+x-1)e^x=xe^x$$

$f'(x)=0\Rightarrow xe^x=0\Rightarrow$ $x=0$ sau $e^x=0$ fals

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$\searrow$		0		$\nearrow$

$f'(-1)=-1e^{-1}=-\frac{1}{e}<0\Rightarrow f'(x)<0$ pe $(-\infty;0)\Rightarrow f\searrow$ pe $(-\infty;0]$

$f'(1)=e>0\Rightarrow f'(x)>0$ pe $(0;\infty)\Rightarrow f\nearrow$ pe $[0;\infty)$

$f(0)=-e^0+1=0\xrightarrow{\text{tabel}}f(x)\ge 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ deci și

$f(\frac{1}{n})\ge 0\Rightarrow(\frac{1}{n}-1)e^{\frac{1}{n}}+1\ge 0$ adică relația cerută în $(*)$

V3/2018

II 2a)

Fie $f(x)=x\sqrt{x-2}$, arătați că

$$\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}\,dx=\frac{4}{3}$$

$E_1)$ $I=\int_2^3 x\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x-2}\,dx=$

$=\int_2^3 x(x-2)dx=\int_2^3 (x^2-2x)\,dx=$

$=\frac{x^3}{3}\Big|_2^3-2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_2^3=$

$=\frac{1}{3}(27-8)-(9-4)=\frac{19}{3}-\frac{3}{5}=\frac{4}{3}$

V3/2018

Fie $f:[2,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x-2}$, arătați III 2d)
că volumul obținut prin rotație în jurul lui Ox
a G_g, $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x+2)}{x+2}\cdot\sqrt{e^x}$ este π

$E_1)$ $V=\pi\int_0^1 g^2(x)\,dx$

$E_2)$ $g(x)=\frac{f(x+2)}{x+2}\cdot\sqrt{e^x}=\frac{(x+2)\sqrt{x+2-2}}{x+2}\cdot\sqrt{e^x}=\sqrt{x}\sqrt{e^x}$

$\Rightarrow g(x)=\sqrt{xe^x}$

$E_3)$ $V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{xe^x}\right)^2dx=\pi\int_0^1 xe^x\,dx$

$E_4)$ Fie $I=\int_0^1 xe^x\,dx$

$f=x\to f'=1$
$g'=e^x\Rightarrow g=e^x$ $\Big\}\Rightarrow I=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x\,dx$

$\Rightarrow I=(1e-0)-e^x\Big|_0^1=e-(e^1-e^0)=1$

$E_5)$ $V=\pi\cdot 1\Rightarrow V=\pi$

V3/2018
II 2 c)

Fie $f(x)=x\sqrt{x-2}$, $f:[2;\infty)\to\mathbb{R}$,

se cere $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt}{x^2}$

met I: E1) $I=\int_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt=\int_3^x t\sqrt{t-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt=$

$=\int_3^x t\,dt=\frac{t^2}{2}\Big|_3^x=\frac{x^2-9}{2}$

E2) $l=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2-9}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-9}{2x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{4x}=\dfrac{1}{2}$

met II: dacă arătăm că $\lim\limits_{x\to\infty}\int_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt=\infty$

atunci e cazul $\frac{\infty}{\infty}$ și folosim l'H

Fie $l_1=\lim\limits_{x\to\infty}\int_3^x t\sqrt{t-2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\int_3^x t\,dt=\frac{t^2}{2}\Big|_3^x=\frac{1}{2}(x^2-3)=\infty$

$\Rightarrow l=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt}{x^2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\int_3^x f(t)\cdot\frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt\right)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)\cdot\frac{1}{\sqrt{x-2}}}{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2x}=\dfrac{1}{2}$