Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați conjugatul numărului complex $z=(1-i)(2+i)+5i$.

5p **2.** Determinați numerele naturale n pentru care $n^2+n-12<0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x+1)=2\lg(x-5)$.

5p **4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are 45 de submulțimi cu două elemente.

5p **5.** Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și $\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$. Știind că lungimea vectorului $\vec{v}$ este egală cu 20, determinați lungimea vectorului $\overrightarrow{BD}$.

5p **6.** Arătați că, dacă x este număr real pentru care $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$, atunci $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2x\\ -2x & 1 & -2x^2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(2))$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a)+aA(0))=8$.

5p **c)** Știind că $\det((m+n)A(x))=\det(mA(x))+\det(nA(x))+18$, pentru orice număr real x, determinați numerele naturale m și n, $m<n$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_7$ se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy+\hat{6}x+\hat{6}y+\hat{2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\left(x+\hat{6}\right)\left(y+\hat{6}\right)+\hat{1}$, pentru orice $x, y\in\mathbb{Z}_7$.

5p **b)** Demonstrați că $x*\hat{1}=\hat{1}*x=\hat{1}$, pentru orice $x\in\mathbb{Z}_7$.

5p **c)** Calculați $\hat{0}*\hat{1}*\hat{2}*\hat{3}*\hat{4}*\hat{5}*\hat{6}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x\left(x^2-6x+9\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x\left(x^2-4x+3\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați punctele de extrem ale funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $(x-3)^2\le 4e^{1-x}$, pentru orice $x\in(-\infty,3]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}3x^2-4x+1, & x\in(-\infty,1)\\ \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$.

5p **a)** Demonstrați că funcția f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-1}^{e} f(x)dx=2\left(4-\sqrt{e}\right)$.

5p **c)** Determinați numărul natural n pentru care $\int_{e^n}^{e^{n+1}} f^2(x)dx=\frac{7}{3}$.

Găsiți conjugatul lui $z=(1-i)(2+i)+5i$

$E_1)$ $z=2+i-2i-i^2+5i$

$z=2-i+1+5i$

$z=3+4i$

$E_2)$ $z=3+4i \Rightarrow \bar{z}=3-4i$

Găsiți $n \in \mathbb{N}$ dacă $n^2+n-12<0$

$E_1)$ $n^2+n-12=0 \Rightarrow n_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 7}{2}\begin{matrix}3\\-4\end{matrix}$

$E_2)$

n		-4		3	
n^2+n-12	$+\ +$	0	$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +$

$\Rightarrow n^2+n-12<0 \Leftrightarrow n \in (-4;3)$

$E_3)$ Dar, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \in (-4;3) \cap \mathbb{N} \Rightarrow$

$n \in \{0;1;2\}$

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\lg(x+1) = 2\lg(x-5)$$

E_1) Ec devine $\lg(x+1) = \lg(x-5)^2$ $\Big\} \Rightarrow$

E_2) Deoarece $f(x) = \lg x$ e injectivă

$$\Rightarrow x+1 = (x-5)^2 \Rightarrow x+1 = x^2 - 10x + 25$$

$$\Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121-96}}{2 \cdot 1} = \frac{11 \pm 5}{2} \begin{cases} 8 \\ 3 \end{cases}$$ soluții posibile

E_3) verifici $x = 3 \Rightarrow \lg 4 = 2\lg(-2)$, C.O. $\Rightarrow x = 3$ nu e soluție

verifici $x = 8 \Rightarrow \lg 9 = 2\lg 3 \Leftrightarrow \lg 9 = \lg 9$ ok.

$\Rightarrow x = 8$ soluție

$S_g : x = 8$

Găsiți numărul de elemente al unei mț dacă aceasta are 45 de submulțimi cu 2 elemente

---

E_1) nr. de submț cu k elemente al unei mț cu n elemente este C_n^k

E_2) În cazul nostru, $C_n^2 = 45$

$$\text{Cond}: \begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2 \end{cases} \Rightarrow n \in \{2, 3, 4, \dots\} = M_c$$

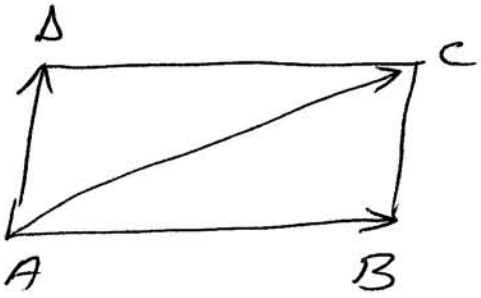
$$E_3) \frac{n!}{2!(n-2)!} = 45 \Rightarrow \frac{(n-2)!(n-1)n}{2!(n-2)!} = 45 \Rightarrow \frac{n^2-n}{2} = 45$$

$$\Rightarrow n^2 - n - 90 = 0 \Rightarrow n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+360}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 19}{2} \begin{cases} 10 \in M_c \\ -9 \notin \mathbb{N} \end{cases}$$

$\Rightarrow n = 10$ soluție

Fie $ABC\Delta$ dreptunghi cu $\vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A\Delta}$

Daca $|\vec{v}| = 20$, se cere $|\overrightarrow{B\Delta}|$



$E_1)\ |\vec{v}| = |\underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{A\Delta}}| =$

$= |2\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AC}| = 2AC$

$E_2)$ Dar, $|\vec{v}| = 20 \Rightarrow 2AC = 20 \Rightarrow AC = 10$

$E_3)$ $ABC\Delta$ dreptunghi $\Rightarrow AC \equiv B\Delta \Rightarrow B\Delta = 10$

Dacă $x \in \mathbb{R}$ cu $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$, să se arate

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$$

$E_1)$ $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \mid ()^2 \Rightarrow \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = 2$

$\Rightarrow 1 + \sin 2x = 2 \Rightarrow \boxed{\sin 2x = 1}$

$E_2)$ $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} =$

$$= \frac{1}{\frac{\sin 2x}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

I 1a)

Fie $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ -2x & 1 & -2x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se cere

$\det(A(2))$

$E_1)$ $A(2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $\det(A(2)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+0-0-0-0 =$

$= 1$

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ -2x & 1 & -2x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, x cu $a \in \mathbb{R}$

dacă: $\det(A(a)+aA(0))=8$

$E_1)$ $A(a)+aA(0)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a \\ -2a & 1 & -2a^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 1+a & 0 & 2a \\ -2a & a+1 & -2a^2 \\ 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $\det(A(a)+aA(0))=\begin{vmatrix} a+1 & 0 & 2a \\ -2a & a+1 & -2a^2 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix}=$

$=(a+1)^3+0+0-0-0-0=(a+1)^3$

$E_3)$ $\det(A(a)+aA(0))=8 \Rightarrow (a+1)^3=8 \mid \sqrt[3]{\cdots}$

$\Rightarrow a+1=2 \Rightarrow \boxed{a=1}$

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2x \\ -2x & 1 & -2x^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, știind că:

$\det((m+n)A(x)) = \det(mA(x)) + \det(nA(x)) + 18, \forall x \in \mathbb{R}$,

se cere $m, n = ?$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$

E_1) $\det((m+n)A(x)) = (m+n)^3 \cdot \det A(x)$ deoarece

$\det(\alpha A) = \alpha^n \cdot \det A$ unde n este nr. de linii sau A

E_2) $\det(mA(x)) = m^3 \det A(x)$

$\det(nA(x)) = n^3 \cdot \det A(x)$

E_3) Relația din ipoteză devine

$(m+n)^3 \det(A(x)) = n^3 \det(A(x)) + n^3 \det(A(x)) + 18, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left((m+n)^3 - m^3 - n^3\right) \det(A(x)) = 18, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left(m^3 + n^3 + 3mn(m+n) - m^3 - n^3\right) \det(A(x)) = 18, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \left(3mn(m+n)\right) \det(A(x)) = 18, \forall x \in \mathbb{R}$

E_4) $\det(A(x)) = 1+0+0-0-0-0 = 1$

$\Rightarrow 3mn(m+n) = 18 \mid :3 \Rightarrow mn(m+n) = 6$

E_5) $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ și $mn(m+n) = 6$

Fie $m = 0 \Rightarrow 0 = 6$ K.O.

Fie $\underline{m=1} \Rightarrow n(1+n) = 6 \Rightarrow n^2 + n - 6 = 0 \Leftarrow \begin{matrix} \underline{n=2} \text{ OK.} \\ n = -3 \notin \mathbb{N} \end{matrix}$

Fie $m = 2 \Rightarrow 2n(2+n) = 6 \Rightarrow n^2 + 2n - 3 = 0 \Leftarrow \begin{matrix} n = 1 < m, \text{K.O.} \\ n = -3 \notin \mathbb{N}, \text{K.O.} \end{matrix}$

Fie $m = 3 \Rightarrow 3n(3+n) = 6 \Rightarrow n^2 + 3n - 2 = 0 \Rightarrow n \notin \mathbb{N}$

Fie $m = 6 \Rightarrow 6n(6+n) = 6 \Rightarrow n(6+n) = 6 \Rightarrow n \notin \mathbb{N}$

$\boxed{m=1, n=2}$

Fie $*$ în $\mathbb{Z}_7$ legea: $x*y = xy + \hat{6}x + \hat{6}y + \hat{2}$,

să se arate $x*y = (x+\hat{6})(y+\hat{6}) + \hat{1}$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}_7$

E_1) $(x+\hat{6})(y+\hat{6}) + \hat{1} = xy + \hat{6}x + \hat{6}y + \hat{36} + \hat{1}$

$= xy + \hat{6}x + \hat{6}y + \hat{37}$ $\overset{\mathbb{Z}_7}{=}$

$= xy + \hat{6}x + \hat{6}y + \hat{2}$

E_2) Apoi, $xy + \hat{6}x + \hat{6}y + \hat{2} = (x+\hat{6})(y+\hat{6}) + \hat{1}$

Fie $x * y = xy + \hat{6}x + \hat{6}y + \hat{2}$ în $\mathbb{Z}_7$, să se

că $x * y = (x + \hat{6})(y + \hat{6}) + \hat{1}$, unde

$$x * \hat{1} = \hat{1} * x = \hat{1}, \quad \forall x \in \mathbb{Z}_7$$

E,) $x * \hat{1} = (x + \hat{6})(\hat{1} + \hat{6}) + \hat{1} = (x + \hat{6}) \cdot \hat{7} + \hat{1} =$

$$= (x + \hat{6}) \cdot \hat{0} + \hat{1} = \hat{1}$$

$$\hat{1} * x = (1 + \hat{6})(x + \hat{6}) + \hat{1} = \hat{7}(x + \hat{6}) + \hat{1} =$$

$$= \hat{0}(x + \hat{6}) + \hat{1} = \hat{1}$$

II 2c)

Pe $\mathbb{Z}_7$ avem legea asociativă $x * y = xy + \hat{6}x + \hat{6}y + \hat{2}$

Se știe: $x * y = (x + \hat{6})(y + \hat{6}) + \hat{1}$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}_7$, unde

$\hat{0} * \hat{1} * \hat{2} * \ldots * \hat{6}$

E_1) Din $x * y = (x + \hat{6})(y + \hat{6}) + \hat{1}$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}_7$

$\Rightarrow \hat{1} * y = \hat{0} \cdot (y + \hat{6}) + \hat{1} \Rightarrow \hat{1} * y = \hat{1}$, $\forall y \in \mathbb{Z}_7$

$x * \hat{1} = (x + \hat{6}) \cdot \hat{0} + \hat{1} \Rightarrow x * \hat{1} = \hat{1}$, $\forall x \in \mathbb{Z}_7$

E_2) $\hat{0} * \hat{1} * \ldots * \hat{6} = \hat{0} * \hat{1} * (\hat{2} * \ldots * \hat{6}) \overset{x * \hat{1} = \hat{1}}{=\!=} \hat{1} * (\underbrace{\hat{2} * \ldots * \hat{6}}_{y}) \overset{\hat{1} * y = \hat{1}}{=\!=} \hat{1}$

Fei $f(x) = e^x(x^2-6x+9)$, x cere

$$f'(x) = e^x(x^2-4x+3)$$

E1) $f'(x) = (e^x(x^2-6x+9))' =$

$$= (e^x)'(x^2-6x+9) + e^x(x^2-6x+9)'$$

$$= e^x(x^2-6x+9) + e^x(2x-6)$$

$$= e^x(x^2-6x+9+2x-6)$$

$$= e^x(x^2-4x+3)$$

III 16)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x^2-6x+9)$, să se

să $f'(x)=e^x(x^2-4x+3)$, să se afle pct de extrem

pct $f(x)$

$E_1)$ $f'(x)=0 \Rightarrow$ $\begin{cases} e^x=0 \Rightarrow x\in\emptyset \\ \text{sau} \\ x^2-4x+3=0 \Rightarrow x\in\{1,3\} \end{cases}$

$E_2)$

x		1		3	
$f'(x)$	$+\;+\;+$	0	$-\;-\;-$	0	$+\;+\;+$
$f(x)$	$\nearrow$	$4e$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$f(1)=e(1-6+9)=4e$

$f(3)=e^3(9-18+9)=0$

$E_3)$ $x=1$ pct MAXIM

$x=3$ pct MINIM

III 1c)

Fie $f(x) = e^x(x^2 - 6x + 9)$, să se arate că $f(x) \leq 4e$, $\forall x \in (-\infty; 3]$, să se arate $(x-3)^2 \leq 4e^{1-x}$, $\forall x \in (-\infty; 3]$

E.) Concluzia $\Leftrightarrow (x-3)^2 \leq 4 \cdot \frac{e^1}{e^x} \quad | \cdot e^x > 0$

$\Leftrightarrow e^x(x-3)^2 \leq 4e$

$\Leftrightarrow f(x) \leq 4e, \forall x \in (-\infty; 3]$

relație adevărată din ipoteză anterioară

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 3x^2-4x+1, & x<1 \\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x\geq 1 \end{cases}$

Arătați că f are primitive pe $\mathbb{R}$

E_1) f cont pe $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$, studiem dacă f cont în $x=1$

E_2) $f_s(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(3x^2-4x+1)=0$

$f_d(1)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\frac{\ln 1}{1}=0$

$f(1)=\frac{\ln 1}{\sqrt{1}}=0$

$\Rightarrow f$ cont în $x=0$

E_3) f cont pe $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$ și f cont în $x=1$

$\Rightarrow f$ cont pe $\mathbb{R}\Rightarrow f$ admite primitive pe $\mathbb{R}$

III 26)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} 3x^2-4x+1, & x\in(-\infty;1) \\ \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x\in[1,\infty) \end{cases}$

Arătați că $\int_{-1}^{e} f(x)dx = 2(4-\sqrt{e})$

E1) Deoarece forma funcției f se schimbă în $x=1$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{e} f(x)dx = \int_{-1}^{1}(3x^2-4x+1)dx + \int_{1}^{e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$$

E2) $I_1 = \int_{-1}^{1}(3x^2-4x+1)dx = 3\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} - 4\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + x\Big|_{-1}^{1} =$

$$= (1+1) - 2(1-1) + (1+1) = 4$$

E3) $I_2 = \int_{1}^{e}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow g(x) = \int\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$

$I_2 = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^e - 2\int_1^e \frac{1}{x}\sqrt{x}dx$

$I_2 = (2\sqrt{e}\ln e - 2\cdot 1\cdot 0) - 2\int_1^e x^{-\frac{1}{2}}dx \Rightarrow$

$I_2 = (2\sqrt{e}\cdot 1 - 0) - 2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_1^e \Rightarrow$

$I_2 = 2\sqrt{e} - 4\sqrt{x}\Big|_1^e = 2\sqrt{e} - 4(\sqrt{e}-1) = -2\sqrt{e}+4$

E4) $I = I_1 + I_2 \Rightarrow I = 4 + (-2\sqrt{e}+4) = 8 - 2\sqrt{e}$

$\Rightarrow I = 2(4-\sqrt{e})$

III 2c)

Fie $f(x)=\begin{cases} 3x^2-4x+1, & x\in(-\infty;1) \\ \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}, & x\in[1;\infty) \end{cases}$

Se cere $n\in\mathbb{N}$ dacă $\int_{e^n}^{e^{n+1}} f^2(x)\,dx=\frac{7}{3}$

E_1) Se cere $\int_{e^n}^{e^{n+1}} f^2(x)\,dx \Rightarrow$ alegem ramura lui f care conține $\mu[e^n, e^{n+1}] \Rightarrow f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

E_2) $I=\int_{e^n}^{e^{n+1}} \frac{\ln^2 x}{x}\,dx$

$t=\ln x\,|()' \Rightarrow dt=\frac{1}{x}dx$

$x=e^n \Rightarrow t=\ln e^n=n$ și $x=e^{n+1} \Rightarrow t=\ln e^{n+1}=n+1$

$$I(t)=\int_n^{n+1} t^2\,dt=\frac{t^3}{3}\Big|_n^{n+1}=\frac{1}{3}\left((n+1)^3-n^3\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(n^3+3n^2+3n+1-n^3\right)=\frac{1}{3}\left(3n^2+3n+1\right)$$

E_3) Dar, $I=\frac{7}{3} \Rightarrow 3n^2+3n+1=7 \Rightarrow 3n^2+3n-6=0\,|:3$

$\Rightarrow n^2+n-2=0 \Rightarrow n_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2\cdot 1}=\frac{-1\pm 3}{2}\begin{cases} 1 \in \mathbb{N} \\ -2\notin\mathbb{N} \end{cases}$

S_f: $n=1$