Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că suma elementelor mulțimii $\{n\in\mathbb{N}\,|\,n(n+2)<14\}$ este egală cu 3.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+b$. Determinați numerele reale a și b, știind că $f(0)=1$ și $f(x+1)=f(x)+2$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $(x+5)^2-9>0$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor ordonate cu două elemente ale mulțimii $\{1,3,5,7,9\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(3,5)$ și $C(-1,3)$. Determinați coordonatele simetricului punctului A față de mijlocul segmentului BC.

5p **6.** Calculați sinusul unghiului D al triunghiului DEF, știind că semiperimetrul triunghiului DEF este egal cu 6, $DE=4$ și $DF=5$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ și $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că $\det A=2$.

5p **b)** Determinați numerele reale x și y pentru care $A\cdot A\cdot A=xA+yI_3$.

5p **c)** Determinați inversa matricei $B=A+I_3$.

2. Pe mulțimea $M=(0,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=x^{2\log_3 y}$.

5p **a)** Arătați că $2\circ 9=16$.

5p **b)** Determinați numărul real x, $x\in M$ pentru care $x\circ 3=25$.

5p **c)** Demonstrați că legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $e^{x-2}-x+1\geq 0$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sin x$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x f(x)\,dx=1$.

5p **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

Prof. Ovidiu Badescu

Arătați că suma elementelor mulțimii

$\{n \in \mathbb{N} \mid n(n+2) < 14\}$ este egală cu 3

E_1) încercăm care valori $n \in \mathbb{N}$ verifică $n(n+4) < 14$

E_2) $n = 0 \Rightarrow 0 \cdot 2 < 14 \Leftrightarrow 0 < 14$ adev

$n = 1 \Rightarrow 1 \cdot 3 < 14 \Leftrightarrow 3 < 14$ adev

$n = 2 \Rightarrow 2 \cdot 4 < 14 \Leftrightarrow 8 < 14$ adev

$n = 3 \Rightarrow 3 \cdot 5 < 14 \Leftrightarrow 15 < 14$ fals

$\forall n \geq 3 \rightarrow n(n+2) \geq 3 \cdot 5 \Rightarrow n(n+2) \geq 15$

deci nu poate fi $n(n+2) < 14$

E_3) $n \in \{0, 1, 2\} \Rightarrow$ suma $0+1+2 = 3$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=ax+b$, $a,b\in\mathbb{R}$ date
$f(0)=1$ și $f(x+1)=f(x)+2$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$E_1)$ $f(0)=1 \Rightarrow \boxed{b=1}$

$f(x+1)=f(x)+2 \Rightarrow a(x+1)+b=ax+b+2$

$\Rightarrow ax+a+b=ax+b+2$

$\Rightarrow a+b=b+2 \Rightarrow \boxed{a=2}$

$E_2)$ $f(x)=ax+b \Rightarrow f(x)=2x+1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

$$(x+5)^2-9>0$$

$E_1)$ $\text{inec} \Leftrightarrow x^2+10x+25-9>0$

$\Leftrightarrow x^2+10x+16>0$

$E_2)$ $x_{1,2}=\dfrac{-10\pm\sqrt{100-64}}{2\cdot 1}=\dfrac{-10\pm 6}{2}\begin{matrix}-2\\-9\end{matrix}$

$E_3)$

x		-9		-2	
$x^2+10x+16$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\not\Rightarrow$ ca $x^2+10x+16>0 \Leftrightarrow$

$x\in(-\infty,-9)\cup(-2,\infty)$

Prof. Ovidiu Bădescu

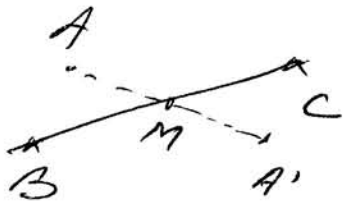
Găsiți nr. smț. ordonate cu două elemente pt $M=\{1;3;5;7;9\}$

E.) nr. smț. ordonate cu k elem din n posibile este A_n^k, în cazul nostru $A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = 20$

$\Rightarrow$ 20 smț.

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(0;2)$, $B(3;5)$, $C(-1;3)$, să se aflu coord. simetricului lui A față de mijl lui BC



E_1) Fie M mijl BC $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{3-1}{2} = 1 \\ y_M = \frac{5+3}{2} = 4 \end{cases} \Rightarrow M(1;4)$$

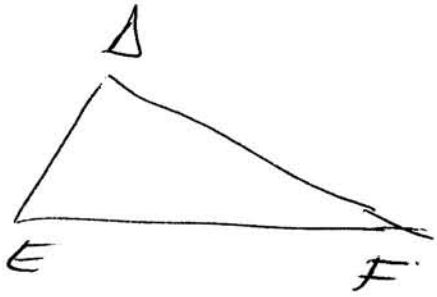
E_2) M mijl lui AA' $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \frac{0 + x_{A'}}{2} \Rightarrow x_{A'} = 2 \\ 4 = \frac{2 + y_{A'}}{2} \Rightarrow y_{A'} = 6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A'(2;6)$$

Prof. Ovidiu Badescu

Calculați $\sin\Delta = ?$ dacă semiperimetrul ΔDEF este 6 și $DE = 4$, $DF = 5$

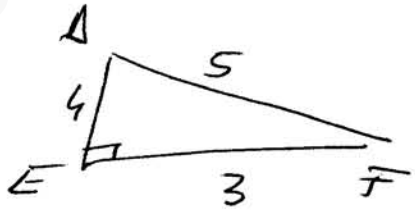


E_1) semiperimetrul este

$$p = \frac{DE + EF + DF}{2} \Rightarrow 6 = \frac{4 + EF + 5}{2} \Rightarrow 12 = 9 + EF$$

$$\Rightarrow \boxed{EF = 3}$$

E_2) dacă suntem deștepți, obs. că ΔDEF are laturile $DE = 4$, $DF = 5$, $EF = 3$ și obs. că



$$DF^2 = DE^2 + EF^2 \Rightarrow m(\hat{E}) = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \sin\Delta = \frac{EF}{DF} = \frac{3}{5}$$

Dacă NU suntem deștepți, din T. cos $\Rightarrow$

$$EF^2 = DE^2 + DF^2 - 2 DE \cdot DF \cdot \cos\Delta \Rightarrow$$

$$9 = 16 + 25 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos\Delta \Rightarrow 9 = 41 - 40\cos\Delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\Delta = \frac{32}{40} = \frac{4}{5}$$

Dar, $\sin^2\Delta + \cos^2\Delta = 1 \Rightarrow \sin^2\Delta + \frac{16}{25} = 1 \Rightarrow \sin^2\Delta = \frac{9}{25}$

$$\Rightarrow \sin\Delta = \pm\frac{3}{5}$$

Dar, Δ este unghi în $\Delta ABC \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta \in (0; \pi) \Rightarrow \sin\Delta > 0 \Rightarrow \sin\Delta = \frac{3}{5}$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, să se arate că $\det A=2$

E1) $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=0+0+0+1+1-0=$

$=2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, x cu $x, y \in \mathbb{R}$ dacă

$$A \cdot A \cdot A = x \cdot A + y I_3$$

$E_1)$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$E_2)$ $A^3 = xA + yI_3 \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & -x & x \\ x & -x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 0 & x \\ 0 & y-x & x \\ x & -x & y \end{pmatrix}$$

$E_3)$
$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x = 1 \\ y - x = 1 \\ x = 1 \\ \boxed{x = 1} \\ -x = -1 \\ \boxed{y = 2} \end{cases}$$

$\Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix}$ care verifică și celelalte ecuații

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați inversa lui $B = A + I_3$ unde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$E_1)$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $\det B = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0+0+0-0+2-0 = 2 \neq 0$

$\Rightarrow \exists B^{-1}$

$E_3)$ $B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$E_4)$ $B^* = ?$

$b^*_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$ $\quad b^*_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

analog se calculează $b^*_{13} = 0$, $b^*_{21} = 1$, $b^*_{22} = 1$,

$b^*_{23} = -2$, $b^*_{31} = 0$, $b^*_{32} = 2$, $b^*_{33} = 0$

$$\Rightarrow B^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{\det B} \cdot B^* = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = x^{2\log_3 y}$, x cre $2 \circ 9 = 16$

$E_1) \; 2 \circ 9 = 2^{2\log_3 9} = 2^{2 \cdot 2} = 2^4 = 16$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $M=(0;\infty)$ și $x \circ y = x^{2\log_3 y}$, găsiți $x \in M$ dacă $x \circ 3 = 25$

$E_1) x \circ 3 = 25 \Rightarrow x^{2\log_3 3} = 25 \Rightarrow x^2 = 25$

$\Rightarrow x = \pm 5$

$E_2)$ Dar, $x \in (0;\infty)$ $\Rightarrow x = 5$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = x^{2\log_3 y}$, arătați că legea $\circ$ e comutativă pe $M = (0; \infty)$

E_1) $\forall x, y \in M$ avem $x \circ y = y \circ x$ (?)

E_2) folosim $\boxed{a^{k\log_b c} = c^{k\log_b a}}$

$$x \circ y = x^{2\log_3 y} = y^{2\log_3 x} = y \circ x$$

$\Rightarrow \circ$ comut pe M

Obs.: dacă știam doar că $\boxed{a^{\log_b c} = c^{\log_b a}}$

$$\Rightarrow x \circ y = x^{2\log_3 y} = \left(x^{\log_3 y}\right)^2 = \left(y^{\log_3 x}\right)^2 = y^{2\log_3 x} =$$

$$= y \circ x$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{e^x}{x-1}$, arătați că $f'(x)=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$

$E_1)\ f'(x)=\left(\frac{e^x}{x-1}\right)'=\frac{e^x(x-1)-e^x\cdot 1}{(x-1)^2}=$

$=\frac{e^x(x-1-1)}{(x-1)^2}=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{e^x}{x-1}$, se știe că $f'(x)=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, se cer intervalele de monot ale f, $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$

$E_1)$ $f'(x)=0 \Rightarrow \frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}=0 \Rightarrow e^x(x-2)=0$

$\Rightarrow$ $e^x=0$ fals pt că $e>0 \Rightarrow e^x>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$
sau
$x-2=0 \Rightarrow x=2$

$E_2)$

x	$(1$		2	
f'	$\nexists$	$---$	0	$+\ +\ +$
f	$\nexists$	$\searrow$		$\nearrow$

$\Rightarrow f_s\searrow$ pe $(1;2]$ și $f_s\nearrow$ pe $[2;\infty)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{e^x}{x-1}$, $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$ se știe că

$f'(x)=\frac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$, se cere $e^{x-2}-x+1\geq 0$, $\forall x>1$

$E_1)$ $f'(x)=0\Rightarrow e^x(x-2)=0\Rightarrow x=2$

$E_2)$

x	$(1$		2	
f'	//	$-$	0	$+$
f	//	$\searrow$	min	$\nearrow$

$E_3)$ Din tabelul de variație $\Rightarrow f(x)\geq f(2)$,

$\Rightarrow \frac{e^x}{x-1}\geq\frac{e^2}{1}$, $\forall x\in(1;\infty)$

Dar, $x>1\Rightarrow x-1>0$ deci putem înmulți inegalitatea cu $x-1$ fără a-i schimba sensul

$\Rightarrow \frac{e^x}{x-1}\geq e^2 \mid\cdot(x-1)>0$, $\forall x>1$

$\Rightarrow e^x\geq e^2(x-1) \mid :e^2$, $\forall x>1$

$e^{x-2}\geq x-1\Rightarrow e^x-x+1\geq 0$, $\forall x>1$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x) = \sin x$, se cere

$$\int_0^{\pi/3} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

$$E_1)\ I = \int_0^{\pi/3} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/3} =$$

$$= -\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 0\right) = -\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\sin x$, să cere $\int_0^{\pi/2} x f(x)\,dx = 1$

$E_1)\ I=\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$

$f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$

$g'(x)=\sin x \Rightarrow g(x)=-\cos x$

$I = x\cdot(-\cos x)\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2}\cos x\,dx$

$I = -x\cos x\Big|_0^{\pi/2} + \sin x\Big|_0^{\pi/2}$

$I = -\left(\frac{\pi}{2}\underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} - 0\underbrace{\cos 0}_{1}\right) + \left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)$

$I = -(0-0)+(1-0) \Rightarrow I=1$

Prof. Ovidiu Boaescu

Fie $f(x) = \sin x$, găsiți volumul corpului obținut prin rotația în jurul lui Ox a G_g unde $g: [0; \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$

$E_1)$ $V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} g^2(x)\,dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\,dx$

$E_2)$ Dar, $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$$\Rightarrow V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2x}{2}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - \frac{1}{2}\left(\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1} - \underbrace{\sin 0}_{0} \right) \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi(\pi-2)}{8}$$

Prof. Ovidiu Bădescu