Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 3

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1-2i$. Arătați că $z^2-2z+5=0$.

5p **2.** Determinați numerele reale a și b, pentru care graficele funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+a$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=bx+2$ se intersectează în punctul $M(2,8)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(4x+5)=1+\log_3(x+3)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele pare.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$, $B(4,1)$ și $C(0,8)$. Determinați lungimea segmentului CM, știind că M este simetricul punctului A față de punctul B.

5p **6.** Calculați aria paralelogramului $ABCD$, știind că $AB=6$, $AC=10$ și $m(\sphericalangle BAC)=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $M(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a+1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=2\\ (a+1)x-y+z=0\\ x+y-az=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(-1))=0$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(M(a))=0$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, știind că sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și $2x_0+y_0z_0=0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=\frac{1}{10}xy-(x+y)+20$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\frac{1}{10}(x-10)(y-10)+10$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x\le\frac{101}{10}$.

5p **c)** Calculați $\log_2 1*\log_2 2*\log_2 3*\ldots*\log_2 2018$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+6x-6\ln(x+1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{6x^3}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că valoarea minimă a funcției f este 0.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)}}{x}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+x+1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=\frac{11}{6}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f are exact două puncte de inflexiune.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)\,dx=1$.

Fie $z = 1-2i$, arătați că

$$z^2 - 2z + 5 = 0$$

$\in$) înlocuiesc $\Rightarrow (1-2i)^2 - 2(1-2i) + 5 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 4i + 4i^2 - 2 + 4i + 5 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 4 + 3 = 0$ adev

$\Rightarrow z = 1-2i$ verifică ecuația

Găsiți a, b dacă $G_f \cap G_g = \{M(2,8)\}$ unde $f(x) = 2x + a$ și $g(x) = bx + 2$

$E_1)$ $G_f \cap G_g = M(2,8) \Rightarrow \begin{cases} M \in G_f \Rightarrow f(2) = 8 \\ M \in G_g \Rightarrow g(2) = 8 \end{cases}$

$E_2)$ $\begin{cases} 4 + a = 8 \\ 2b + 2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases}$

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\log_3(4x+5) = 1 + \log_3(x+3)$$

E_1) deoarece $1 = \log_3 3 \Rightarrow$ ec devine

$$\log_3(4x+5) = \log_3 3 + \log_3(x+3)$$

$$\Rightarrow \log_3(4x+5) = \log_3(3(x+3))$$

E_2) Cum $f(x) = \log_3 x$ e inj

$$\Rightarrow 4x+5 = 3(x+3) \Rightarrow 4x+5 = 3x+9$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ sol posibilă}$$

E_3) o verific în ec $\Rightarrow$

$$\log_3(16+5) = 1 + \log_3 7$$

$$\Leftrightarrow \log_3 21 = \log_3 3 + \log_3 7$$

$$\Leftrightarrow \log_3 21 = \log_3 21 \text{ adev}$$

$\Rightarrow x = 4$ verifică $\Rightarrow x = 4$ soluție

Calculați probabilitatea ca alegând un nr. natural de două cifre, acesta să aibă cifrele pare

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorab}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile: toate nr. de două cifre

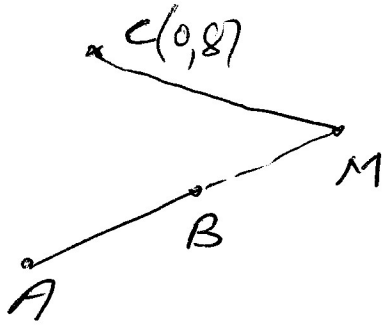
$\overline{ab} \Rightarrow \begin{cases} a \to 9\text{ V} \\ b \to 10\text{ V} \\ \text{indep} \end{cases} \Rightarrow$ 90 numere

$E_3)$ nr. caz favorabile: $\overline{ab}$ cu a și b pare

$\begin{cases} a \to 4\text{ V} \\ b \to 5\text{ V} \\ \text{indep} \end{cases} \Rightarrow$ 20 numere

$E_4)$ $P = \dfrac{20}{90} = \dfrac{2}{9}$

Fie $A(2,2)$, $B(4,1)$, $C(0;8)$, să se afle lungimea lui CM dacă M este simetricul lui A față de B



E_1) M simetricul lui A față de B

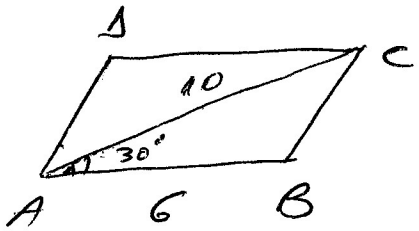
$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_M}{2} \Rightarrow 4 = \frac{2 + x_M}{2} \Rightarrow x_M = 8 - 2 \Rightarrow x_M = 6 \\ y_B = \frac{y_A + y_M}{2} \Rightarrow 1 = \frac{2 + y_M}{2} \Rightarrow y_M = 2 - 2 \Rightarrow y_M = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M(6,0)$$

$$E_2)\ CM = \sqrt{(x_M - x_C)^2 + (y_M - y_C)^2} =$$

$$= \sqrt{(6-0)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$$

Calculați aria paralelogramului $ABC\Delta$ dacă $AB=6$, $AC=10$, $m(B\hat{A}C)=\frac{\pi}{6}$



$E_1)$ $\mathcal{A}_{ABC\Delta} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC} =$

$= 2 \cdot \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(B\hat{A}C)}{2} =$

$= 6 \cdot 10 \cdot \sin 30^\circ = 60 \cdot \frac{1}{2} = 30$

Fie $M(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$, arătați că $\det(M(-1))=0$

$E_1)$ $\det(M(-1))=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+1+0+1-1-0 = 0$

Fie $M(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$, unde

$a \in \mathbb{R}$ dacă $\det(M(a))=0$

$E_1)$ $\det(M(a))=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a+1+(a+1)+1-1+a(a+1)=0$

$\Leftrightarrow 2a+2+a^2+a=0 \Leftrightarrow$

$a^2+3a+2=0$

$a_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2\cdot 1}=\frac{-3\pm 1}{2}\begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix}$

$\Rightarrow a \in \{-2,-1\}$

V3/2022

Fie $\begin{cases} x+y+z=2 \\ (a+1)x-y+z=0 \\ x+y-az=1 \end{cases}$, a cu $a=?$ dacă sist. are sol unică (x_0,y_0,z_0) și $2x_0+y_0z_0=0$ II 1c)

E_1) Sist are sol unică $\Leftrightarrow \det S \neq 0$

E_2) $\det S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = a+(a+1)+1+1-1+a(a+1) =$

$= 2a+2+a^2+a = a^2+3a+2$

$\det S = 0 \Leftrightarrow a^2+3a+2=0 \Rightarrow a_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2\cdot 1} = \frac{-3\pm 1}{2} \begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix}$

Așadar $\det S \neq 0 \Leftrightarrow \boxed{a \in \mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}}$ și $\boxed{\det S = 1(a+2)(a+1)}$

E_3) $\det S \neq 0 \Rightarrow$ folosim Cramer

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = 2a+1+0+1-0+2 = 2a$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = 0+2+(a+1)-0-1+2a(a+1) =$

$= a+2+2a^2+2a = 2a^2+3a+2$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a+1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+0+2(a+1)+2-0-(a+1) =$

$= 2a+3-a-1 = a+2$

E_4) $x_0 = \frac{\Delta_x}{\det A} = \frac{2a}{(a+2)(a+1)}$; $y = \frac{\Delta_y}{\det A} = \frac{2a^2+3a+2}{(a+2)(a+1)}$

$z_0 = \frac{\Delta_z}{\det A} = \frac{a+2}{(a+2)(a+1)} = \frac{1}{a+1}$

E_5) $2x_0+y_0z_0=0 \Rightarrow \frac{4a}{(a+2)(a+1)} + \frac{(2a^2+3a+2)\cdot 1}{(a+2)(a+1)^2} = 0 \Big| \cdot (a+2)(a+1)^2$

$\Rightarrow 4a(a+1)+2a^2+3a+2=0 \Rightarrow 6a^2+7a+2=0$

$\Rightarrow a_{1,2} = \frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{2\cdot 6} = \frac{-7\pm 1}{12} \begin{matrix} -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}\setminus\{-2,-1\} \\ -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3} \in \mathbb{R}\setminus\{-2,-1\} \end{matrix}$

Deci, $a \in \{-\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}\}$

Fie $x * y = \frac{1}{10} xy - (x+y) + 20$

Arătați că $x * y = \frac{1}{10}(x-10)(y-10) + 10$

E1) Calculăm $\frac{1}{10}(x-10)(y-10)+10 =$

$= \frac{1}{10}(xy - 10x - 10y + 100) + 10 =$

$= \frac{1}{10} xy - x - y + 10 + 10 =$

$= \frac{1}{10} xy - (x+y) + 20 = x * y$

E2) Deci, $x * y = \frac{1}{10}(x-10)(y-10)+10$

Fie $x * y = \frac{1}{10} xy - (x+y) + 20$, să știe că $x * y = \frac{1}{10}(x-10)(y-10) + 10$, să cer valorile reale ale lui x dacă $x * x \leq \frac{101}{10}$

E_1) Soluție formă restrânsă $\Rightarrow$

$$x * x \leq \frac{101}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{10}(x-10)(x-10) + 10 \leq \frac{101}{10} \mid \cdot 10$$

$$\Leftrightarrow (x-10)^2 + 100 \leq 101 \Leftrightarrow (x-10)^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |x-10| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x-10 \leq 1 \mid +10$$

$$\Rightarrow 9 \leq x \leq 11 \Rightarrow x \in [9; 11]$$

Obs: dacă nu ne venea ideea de mai sus, relația $(x-10)^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 \leq 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 99 \leq 0$$

$$x_{1,2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 - 396}}{2 \cdot 1} = \frac{20 \pm 2}{2} \begin{matrix} 11 \\ 9 \end{matrix}$$

x		9		11	
$x^2 - 20x + 99$	$+ +$	0	$- - - -$	0	$+ +$

Deci $x^2 - 20x + 99 \leq 0 \Leftrightarrow x \in [9; 11]$

V3/2018

Fie $x*y=\frac{1}{10}xy-(x+y)+20$, se știe că II 2c)

$$x*y=\frac{1}{10}(x-10)(y-10)+10,$$

calculați $\log_2 1 * \log_2 2 * \dots * \log_2 2018$

E_1) din $x*y=\frac{1}{10}(x-10)(y-10)+10 \Rightarrow$

$x*10=\frac{1}{10}(x-10)\cdot 0+10 \Rightarrow x*10=10, \forall x\in\mathbb{R}$

$10*y=\frac{1}{10}\cdot 0(y-10)+10 \Rightarrow 10*y=10, \forall y\in\mathbb{R}$

E_2) deoarece $x*y$ are forma $x*y=\alpha(x-\beta)(y-\beta)+\beta$

$\Rightarrow *$ asociativă (aici se spune în ip că e asociat)

E_3) ar trebui ca în $\log_2 1 * \log_2 2 * \dots * \log_2 2018$ să apară factor numărul 10, astfel

$10=\log_2 2^{10}=\log_2 1024$ care e printre factori

E_4) $N=(\log_2 1 * \dots * \log_2 1023) * \log_2 1024 * (\log_2 1025 * \dots * \log_2 2018)$

$N=(\underbrace{\log_2 1 * \dots * \log_2 1023}_{x}) * 10 * (\log_2 1025 * \dots * \log_2 2018)$

$N \overset{x*10=10}{=\!=} 10 * (\underbrace{\log_2 1025 * \dots * \log_2 2018}_{y})$

$N \overset{10*y=10}{=\!=} 10$

Fie $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 6\ln(x+1)$

Arătați că $f'(x) = \frac{6x^3}{x+1}$

E1) $f'(x) = (2x^3 - 3x^2 + 6x - 6\ln(x+1))' =$

$= 6x^2 - 6x + 6 - 6 \cdot \frac{1}{x+1} \cdot 1 =$

$= \frac{6x^2(x+1) - 6x(x+1) + 6(x+1) - 6}{x+1} =$

$= \frac{6x^3 + 6x^2 - 6x^2 - 6x + 6x + 6 - 6}{x+1} =$

$= \frac{6x^3}{x+1}$

Fie $f(x)=2x^3-3x^2+6x-6\ln(x+1)$, se știe că $f'(x)=\frac{6x^3}{x+1}$, $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$

Arătați că valoarea minimă a lui f este 0

$E_1)$ $f'(x)=0 \Rightarrow 6x^3=0 \Rightarrow x=0\in D_f$

$E_2)$

x	$(-1$		0	
$f'(x)$		$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$
$f(x)$	$\nexists$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$f'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{6\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)}{-\frac{1}{2}+1}=\frac{-\frac{3}{4}}{\frac{1}{2}}<0 \Rightarrow f'(x)<0$ pe $(-1;0)$

$\Rightarrow f\searrow$ pe $(-1;0]$

$f'(1)=\frac{6}{2}=3>0 \Rightarrow f'(x)>0$ pe $(0;\infty)$

$\Rightarrow f\nearrow$ pe $[0;\infty)$

$f(0)=2\cdot 0-3\cdot 0+6\cdot 0-\ln 1$

$f(0)=\ln 1 \Rightarrow f(0)=0$

Din tabelul de variație $\Rightarrow$ valoarea minimă a lui f este 0

VS / 2018

Fie $f(x)=2x^3-3x^2+6x-6\ln(x+1)$, să se calc. (III 1c)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)}}{x}$$

E1) $l=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2x^3-3x^2+6x-6\ln(x+1)}}{x}$ $\frac{\sqrt{0}}{0}$ ═══ e corect

exceptat, dar cu l'H nu se va elimina radicalul

E2) deoarece numitorul este 0, vom calcula $l_s(0)$ și $l_d(0)$

E3) $l_s(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sqrt{f(x)}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}-\sqrt{\frac{f(x)}{x^2}}$

Fie $l_1=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{2x^3-3x^2+6x-6\ln(x+1)}{x^2}\ \frac{0}{0}\overset{l'H}{=}$

$=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{6x^2-6x+6-6\cdot\frac{1}{x+1}}{2x}\ \frac{0}{0}\overset{l'H}{=}\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{12x-6+6\cdot\frac{1}{(x+1)^2}}{2}=0$

$\Rightarrow l_s(0)=-\sqrt{0}\Rightarrow \boxed{l_s(0)=0}$ (1)

E4) $l_d(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sqrt{f(x)}}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\sqrt{\frac{f(x)}{x^2}}$

analog ca l_1, $l_2=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)}{x^2}\ \frac{0}{0}\overset{l'H}{=}\ldots=0$ (dar se calculează la BAC) $\Rightarrow l_d(0)=-\sqrt{0}\Rightarrow \boxed{l_d(0)=0}$ (2)

E5) din (1)+(2) $\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{f(x)}}{x}=0$

Fie $f(x)=(x^2+x+1)e^x$, arătați că

$$\int_0^1 f(x)\cdot e^{-x}\,dx=\frac{11}{6}$$

$E_1)$ $I=\int_0^1 (x^2+x+1)e^x\cdot e^{-x}\,dx=$

$=\int_0^1 (x^2+x+1)\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+x\Big|_0^1=$

$=\left(\frac{1}{3}-0\right)+\left(\frac{1}{2}-0\right)+(1-0)=$

$=\frac{2}{3}+\frac{3}{6}+1=\frac{11}{6}$

V3 var 8

Fie $f(x)=(x^2+x+1)e^x$, arătați că orice $\underline{\underline{II}}$ 2b) primitivă pt f are exact două puncte de inflexiune

---

E_1) f continuă $\Rightarrow$ f admite primitive, fie $F(x)$ o primitivă oarecare a sa $\Rightarrow$ $\begin{cases} F \text{ derivabilă} \\ F'(x)=f(x) \end{cases}$

E_2) $F'(x)=f(x) \Rightarrow F'(x)=(x^2+x+1)e^x$

E_3) $F''(x)=\left((x^2+x+1)e^x\right)'=(2x+1)e^x+(x^2+x+1)e^x=$

$=(x^2+3x+2)e^x$

$F''(x)=0 \rightarrow \begin{cases} x^2+3x+2=0 \Rightarrow x\in\{-2;-1\} \\ \text{sau} \\ e^x=0 \text{ fals} \end{cases}$

E_4) deoarece $e^x>0, \forall x\in\mathbb{R}$ iar x^2+3x+2 este expresie de gr $\underline{\underline{II}}$ cu $\Delta>0$ care între rădăc are semn contrar lui a, în afara rad ac semn cu a $\Rightarrow$

x		-2		-1	
F''	$+\,+$	0	$-\,-\,-$	0	$+\,+$
F	$\cup$		$\cap$		$\cup$

$\Rightarrow F$ are 2 pct de inflexiune

V3/IV (20)

Fie $f(x)=(x^2+x+1)e^x$, arătați că $\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t f(x)dx=1$

E1) $l=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\int_0^t f(x)dx}{t}$

E2) Fie $l_1=\lim\limits_{t\to 0}\int_0^t f(x)dx \underline{\underline{\int_0^0 f(x)dx}} 0$

$\Rightarrow l \underset{l'H}{\underline{\underline{\frac{0}{0}}}} \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\left(\int_0^t f(x)dx\right)'}{t'}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)}{1}=$

$=\lim\limits_{t\to 0}(t^2+t+1)e^t \underline{\underline{1\cdot e^0}} 1$

Obs: se putea calcula $\int_0^t f(x)dx$ și apoi limita, era mai lungă rezolvarea dar se lua punctaj maxim.