Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
Clasa a XII-a

Simulare

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați partea întreagă a numărului real $a=\sqrt[3]{125}+\sqrt{5}$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $(f\circ f)(x)=f(x+1)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x+1}\le\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+5}$.

5p **4.** Determinați numărul de submulțimi cu cel puțin trei elemente ale mulțimii $A=\{0,1,2,\ldots,9\}$.

5p **5.** Se consideră triunghiul MNP cu $MN=6$, $MP=8$ și $m(\sphericalangle M)=90°$. Calculați lungimea vectorului $\vec{u}=\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}$.

5p **6.** Determinați numărul real x, știind că $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x+2=0$ și $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x))=0$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)+A(1-x)=2A\left(\frac{1}{2}\right)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A(x)\cdot A(1-x)=\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{Z}_{20}=\{\hat{0},\hat{1},\hat{2},\ldots,\widehat{19}\}$ se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+\hat{3}x+\hat{3}y+\hat{9}$.

5p **a)** Demonstrați că $x\circ y=(x+\hat{3})(y+\hat{3})$, pentru orice $x,y\in\mathbb{Z}_{20}$.

5p **b)** Determinați $a\in\mathbb{Z}_{20}$, știind că $a\circ x=\hat{0}$ pentru orice $x\in\mathbb{Z}_{20}$.

5p **c)** Dați exemplu de $a,b\in\mathbb{Z}_{20}\setminus\{\widehat{17}\}$ pentru care $a\circ b=\hat{0}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\frac{7}{2}$.

5p **b)** Determinați imaginea funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $2e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\ge0$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(\operatorname{tg}x)\,dx=\frac{1}{2}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1\frac{f(x)}{x^2+1}dx$.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n+2}\le(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx\le\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2(n+2)}$, pentru orice număr natural nenul n.

Calculați partea întreagă a numărului I/1

$$a = \sqrt[3]{125} + \sqrt{5}$$

$E_1)$ $\sqrt[3]{125} = 5$

$E_2)$ $\sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3 \mid +5 \Rightarrow 7 < 5+\sqrt{5} < 8$

$E_3)$ $[a] = [5+\sqrt{5}] = 7$

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+m$, să se afle $m=?$ dacă

$(f\circ f)(x)=f(x+1)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$E_1)$ $(f\circ f)(x)=f(x+1) \Rightarrow f(f(x))=f(x+1)$

$\Rightarrow f(x+m)=x+1+m \Rightarrow (x+m)+m=x+m+1$

$\Rightarrow \cancel{x}+2m=\cancel{x}+m+1$

$\Rightarrow \boxed{m=1}$

Rezolvați: $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{3x+5}$

E1) $b = \frac{2}{3} \in (0;1)$

$\left(\frac{2}{3}\right)^{4x+1} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{3x+5}$ $\Rightarrow 4x+1 \geq 3x+5$

$\Rightarrow x \geq 4 \Rightarrow x \in [4;\infty)$

Găsiți nr. smț cu cel puțin 3 elemente ale lui $A = \{0; 1; 2; \dots; 9\}$ I/4

E_1) nr. total de smț ale lui A este $2^n = 2^{10} = 1024$

E_2) din nr. total de smț, scădem smț cu 0 elemente, pe cele cu 1 element și pe cele cu 2 elemente adică scădem $C_{10}^0 + C_{10}^1 + C_{10}^2 = \frac{10!}{0!(10-0)!} + \frac{10!}{1!(10-1)!} + \frac{10!}{2!(10-2)!} =$

$= \frac{10!}{1 \cdot 10!} + \frac{10!}{1! \, 9!} + \frac{10 \cdot 9!}{2! \, 8!} = 1 + 10 + \frac{90}{2} = 1 + 10 + 45 =$

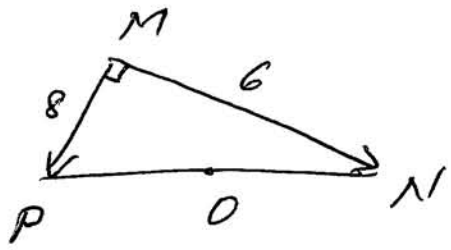
$= 56$

E_3) nr. de smț cerut este $1024 - 56 = 968$

Fie ΔMNP cu $m(\hat{M}) = 90°$, $MN = 6$, $MP = 8$

Se cere $|\vec{u}| = ?$, $\vec{u} = \vec{MN} + \vec{MP}$

E_1)



Fie O mijlocul lui $PN \Rightarrow \vec{MO} = \frac{1}{2}(\vec{MP} + \vec{MN})$

$\Rightarrow \vec{MP} + \vec{MN} = 2\vec{MO}$

E_2) $|\vec{u}| = |\vec{MP} + \vec{MN}| = |2\vec{MO}| = 2\,MO$

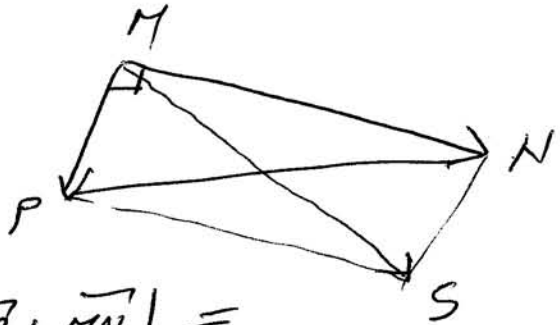
E_3) mediana din vf drept $= \frac{1}{2}$ ipotenuză

$\Rightarrow MO = \frac{1}{2} PN \Rightarrow MO = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$

E_4) $|\vec{u}| = 2 \cdot MO = 10$

---

met II:



$|\vec{u}| = |\vec{MP} + \vec{MN}| =$

$\underset{\text{paralelogr}}{\overset{\text{regula}}{=}} |\vec{MS}| = MS$

Dar, MNSP dreptunghi $\Rightarrow MS = PN \Rightarrow$

$\Rightarrow MS = 10 \Rightarrow |\vec{u}| = 10$

Găsiți $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ cu $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 2 = 0$

E_1) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} \Rightarrow \operatorname{tg} x + \frac{1}{\operatorname{tg} x} + 2 = 0 \mid \cdot \operatorname{tg} x$

$\Rightarrow (\operatorname{tg} x)^2 + 1 + 2\operatorname{tg} x = 0$

$\operatorname{tg} x = t \Rightarrow t^2 + 2t + 1 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2 \cdot 1} = -1$

E_2) $t = -1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1$

$\Rightarrow x \in \{ \operatorname{arctg}(-1) + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \Rightarrow$

$x \in \{ -\operatorname{arctg} 1 + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \Rightarrow$

$x \in \{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$

E_3) $k = 0 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} \notin \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow$ nu e soluție

$k = 1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4} \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow$ soluție

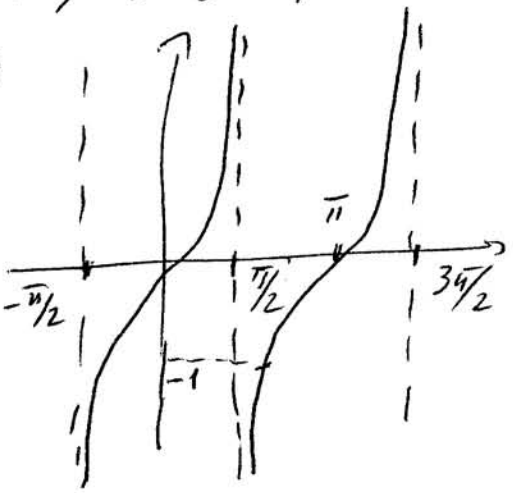
$k = 2 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4} \notin \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

$$S_\beta : x = \frac{3\pi}{4}$$

Obs.: se putea rezolva și grafic, adică

$\operatorname{tg} x = -1$ și $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$



II 1a)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{pmatrix}$

Se cere $x=?$ dacă $\det(A(x))=0$

$E_1)$ $\det(A(x))=\begin{vmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{vmatrix}=$

$$=\frac{x^2}{2}+0+0-(2x-1)^2\cdot\frac{1}{2}-0-0=$$

$$=\frac{x^2}{2}-\frac{4x^2-4x+1}{2}=\frac{-3x^2+4x-1}{2}$$

$E_2)$ $\det(A(x))=0 \Rightarrow -3x^2+4x-1=0 \mid\cdot(-1)$

$$\Rightarrow 3x^2-4x+1=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4\cdot3\cdot1}}{2\cdot3}$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{4\pm2}{6}\begin{cases}1\\ \frac{1}{3}\end{cases}$$

$S_f:\ x\in\{\frac{1}{3};1\}$

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{pmatrix}$ II 16)

Arătați că $A(x)+A(1-x)=2A\left(\frac{1}{2}\right)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$E_1)$ $A(x)+A(1-x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2(1-x)-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2(1-x)-1 & 0 & 1-x \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} x+1-x & 0 & 2x-1+2-2x-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2x-1+2-2x-1 & 0 & x+1-x \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (1)

$E_2)$ $2A\left(\frac{1}{2}\right)=2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2)

$E_3)$ Din (1)+(2) $\Rightarrow$ egalitate

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{pmatrix}$ #1c)

Se cere $x\in\mathbb{R}$ dacă $A(x)\cdot A(1-x)=\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)$

$E_1)$ $A(x)A(1-x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 2(1-x)-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2(1-x)-1 & 0 & 1-x \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} x & 0 & 2x-1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2x-1 & 0 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 1-2x \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1-2x & 0 & 1-x \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} x(1-x)+(2x-1)(1-2x) & 0 & x(1-2x)+(2x-1)(1-x) \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ (2x-1)(1-x)+x(1-2x) & 0 & (2x-1)(1-2x)+x(1-x) \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} x-x^2+2x-4x^2-1+2x & 0 & x-2x^2+2x-2x^2-1+x \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 2x-2x^2-1+x+x-2x^2 & 0 & 2x-4x^2-1+2x+x-x^2 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} -5x^2+5x-1 & 0 & -4x^2+4x-1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ -4x^2+4x-1 & 0 & -5x^2+5x-1 \end{pmatrix}$ (1)

$E_2)$ $\frac{1}{2}A\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ (2)

$E_3)$ egalând elementele $\Rightarrow \begin{cases} -5x^2+5x-1=\frac{1}{4} \mid\cdot 4 \Rightarrow 20x^2-20x+5=0 \\ -4x^2+4x-1=0 \Rightarrow 4x^2-4x+1=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4x^2-4x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ 4x^2-4x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$

Fie în $\mathbb{Z}_{20}$ legea: $x \circ y = xy + \hat{3}x + \hat{3}y + \hat{9}$ II 2a)

Se cere: $x \circ y = (x+\hat{3})(y+\hat{3})$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}_{20}$

$\overline{\in}$) $(x+\hat{3})(y+\hat{3}) = xy + \hat{3}x + \hat{3}y + \hat{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow xy + \hat{3}x + \hat{3}y + \hat{9} = (x+\hat{3})(y+\hat{3})$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}_{20}$

Fie în $\mathbb{Z}_{20}$ legea $x \circ y = xy + \hat{3}x + \hat{3}y + \hat{9}$, se II 25)
știe că $x \circ y = (x+\hat{3})(y+\hat{3})$, se cere $a \in \mathbb{Z}_{20}$, dacă
$a \circ x = \hat{0}$, $\forall x \in \mathbb{Z}_{20}$

E_1) $a \circ x = \hat{0}$, $\forall x \in \mathbb{Z}_{20} \Rightarrow (a+\hat{3})(x+\hat{3}) = \hat{0}$, $\forall x \in \mathbb{Z}_{20}$

$\Rightarrow a+\hat{3} = \hat{0} \Rightarrow a = -\hat{3} \overset{\mathbb{Z}_{20}}{\Rightarrow} \boxed{a = \hat{17}}$

În $\mathbb{Z}_{20}$ avem $x \circ y = xy + \hat{3}x + \hat{3}y + \hat{9}$, se știe că $x \circ y = (x+\hat{3})(y+\hat{3})$, Se cere un exemplu de $a, b \in \mathbb{Z}_{20} \setminus \{\hat{1}, \hat{7}\}$ cu $a \circ b = \hat{0}$ II 2c)

E_1) $a \circ b = \hat{0} \Rightarrow (a+\hat{3})(b+\hat{3}) = \hat{0}$ cu $a, b \in \mathbb{Z}_{20} \setminus \{\hat{1}, \hat{7}\}$
(se cere un exemplu, nu găsirea tuturor soluțiilor)

E_2) Pentru $a+\hat{3} = \hat{2} \Rightarrow a = -\hat{1} \overset{\mathbb{Z}_{20}}{=\!=} \hat{19}$

$b+\hat{3} = \hat{10} \Rightarrow b = \hat{7}$

$\Rightarrow \exists a = \hat{19}, b = \hat{7}, a, b \in \mathbb{Z}_{20} \setminus \{\hat{1}, \hat{7}\}$ cu

$a \circ b = (\hat{19}+\hat{3})(\hat{7}+\hat{3}) = \hat{22} \cdot \hat{10} = \hat{2} \cdot \hat{10} = \hat{20} = \hat{0}$

Fie $f(x)=2x^2-\sqrt{x}$, arătați că

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\frac{7}{2}$$

E_1) limita ne sugerează folosirea

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

E_2) ar trebui să testăm dacă $f(1)=1$ (?)

$$f(1)=2\cdot 1^2-\sqrt{1}\Rightarrow f(1)=1$$

E_3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

E_4) $f'(x)=4x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow f'(1)=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-1}{x-1}=\frac{7}{2}$$

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-\sqrt{x}$

Se cere imaginea lui f

E1) $f'(x)=4x-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{8x\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 8x\sqrt{x}=1 \Rightarrow x\sqrt{x}=\frac{1}{8} \mid ()^2 \Rightarrow$

$x^3=\frac{1}{64} \Rightarrow x^3=\left(\frac{1}{2}\right)^6$ $\Rightarrow x=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x=\frac{1}{4}$

Deoarece $f(x)=x^3$ e inj

E2)

x	0		$\frac{1}{4}$		
f'	$\nexists$	$---$	0	$+++$	$+++$
f	0	$\searrow$	$-\frac{3}{8}$	$\nearrow$	∞

$f'\left(\frac{1}{16}\right)=\frac{8\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{4}-1}{2\sqrt{\frac{1}{16}}}=\frac{\frac{1}{8}-1}{2\cdot\frac{1}{4}}<0 \Rightarrow f'(x)<0$ pe $(0;\frac{1}{4})$

$\Rightarrow f\searrow$ pe $(0;\frac{1}{4}]$

$f'(1)=\frac{8\cdot1\cdot1-1}{2\sqrt{1}}>0 \Rightarrow f'(x)>0$ pe $(\frac{1}{4};\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\nearrow$ pe $[\frac{1}{4};\infty)$

E3) $f(\frac{1}{4})=2\cdot\frac{1}{16}-\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}=\frac{1-4}{8}=-\frac{3}{8}$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}(2x^2-\sqrt{x})=0$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(2x^2-\sqrt{x})=\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(2-\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)\overset{\infty\cdot2}{=}\infty$

E4) $\operatorname{Im} f=[-\frac{3}{8};0)\cup[-\frac{3}{8};\infty)=[-\frac{3}{8};\infty)$

III/1c

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-\sqrt{x}$, să arăt că

$f(x)\geq -\frac{3}{8}$, ceea ce $2e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

E_1) Relația din concluzie este echivalentă cu

$$2e^{2x}-e^{\frac{x}{2}}\geq -\frac{3}{8}$$

E_2) notăm $e^x=t>0 \Rightarrow 2t^2-\sqrt{t}\geq -\frac{3}{8}$, $\forall t>0$

$\Leftrightarrow f(t)\geq -\frac{3}{8}$, $\forall t>0$ care este ceea

deoarece $\operatorname{Im} f=\left[-\frac{3}{8};\infty\right)$

$f(x) = \operatorname{arctg} x$, să se arate $\int_0^1 f(\operatorname{tg} x)\,dx = \frac{1}{2}$

$E_1) I = \int_0^1 f(\operatorname{tg} x)\,dx = \int_0^1 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)\,dx =$

$= \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

Fie $f(x) = \operatorname{arctg} x$, se cere $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx$

E,) $I = \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx$

not $t = \operatorname{arctg} x \,|()' \Rightarrow dt = \frac{1}{x^2+1} dx$

$x = 0 \Rightarrow t = \operatorname{arctg} 0 \Rightarrow t = 0$

$x = 1 \Rightarrow t = \operatorname{arctg} 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

$$I(t) = \int_0^{\pi/4} t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\pi/4} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - 0\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^2}{32}$$

III/2 c)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg} x$, arătați că:

$$\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n+2}\le(n+1)\int_0^1 x^n f(x)\,dx\le\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2(n+2)}$$

E_1) Fie $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx=\int_0^1 x^n\operatorname{arctg} x\,dx$

$f(x)=\operatorname{arctg} x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x^2+1}$

$g'(x)=x^n\Rightarrow g(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$I_n=\frac{x^{n+1}}{n+1}\operatorname{arctg} x\Big|_0^1-\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}\,dx$$

$$I_n=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{\pi}{4}-0-\frac{1}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}\,dx\ \Big|\cdot(n+1)$$

$$(n+1)I_n=\frac{\pi}{4}-\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}\,dx$$

E_2) Relația obținută seamănă cu concluzia, trebuie să încadrăm $\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x^2+1}\,dx$

$$x\in[0;1]\Rightarrow\boxed{\frac{x^{n+1}}{x^2+1}\le x^{n+1}}\quad(1)$$

Analog, $x\in[0;1]\Rightarrow x^2\in[0;1]\Rightarrow x^2+1\in[1;2]\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{1}{x^2+1}\ge\frac{1}{2}\Rightarrow\boxed{\frac{x^{n+1}}{x^2+1}\ge\frac{x^{n+1}}{2}}\ (2)$$

E_3) din (1)+(2) $\Rightarrow\frac{x^{n+1}}{2}\le\frac{x^{n+1}}{x^2+1}\le x^{n+1}\ \Big|\int_0^1\dots dx\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{n+2}}{n+2}\Big|_0^1\le I\le\frac{x^{n+2}}{n+2}\Big|_0^1\Rightarrow\frac{1}{2(n+2)}\le I\le\frac{1}{n+2}\ \Big|\cdot(-1)\Rightarrow$$

$$-\frac{1}{n+2}\le -I\le-\frac{1}{2(n+2)}\ \Big|+\frac{\pi}{4}\Rightarrow\boxed{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{n+2}\le(n+1)I_n\le\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2(n+2)}}$$