Examenul de bacalaureat național 2018
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că numărul $n=\log_3\left(\sqrt{7}-2\right)+\log_3\left(\sqrt{7}+2\right)$ este natural.

5p **2.** Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+6x+3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+2)^3=(2-x)^3$.

5p **4.** Calculați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{0,2,4,6,8\}$.

5p **5.** Punctele M, N și P verifică relația $2\overrightarrow{MN}+3\overrightarrow{NP}=\vec{0}$. Calculați lungimea segmentului MP, știind că $MN=3$.

5p **6.** Arătați că $\sin x+\sin(\pi-x)+\sin(\pi+x)+\sin(2\pi-x)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & y & 1\\ 1 & x & y\\ x & 1 & y\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(2,3)\right)=12$.

5p **b)** Demonstrați că $\det\left(A\left(n^2,n\right)\right)\geq 0$, pentru orice număr natural n.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care inversa matricei $B=A(x,0)\cdot A(x,0)$ este matricea $A(x,0)$.

2. Se consideră polinomul $f=nX^n+X^2-nX-1$, unde n este număr natural, $n\geq 3$.

5p **a)** Arătați că $f(1)=0$, pentru orice număr natural n, $n\geq 3$.

5p **b)** Arătați că, dacă n este număr natural impar, $n\geq 3$, atunci polinomul f este divizibil cu X^2-1.

5p **c)** Arătați că, pentru orice număr natural n, $n\geq 5$, polinomul f **nu** are rădăcini în mulțimea $\mathbb{Q}-\mathbb{Z}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{arctg}x-x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=-\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)+g(x)=\dfrac{\pi}{2}$, pentru orice număr real x, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\operatorname{arcctg}x+x$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x^2}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 f\left(\sqrt{x}\right)dx=\frac{e-1}{e}$.

5p **b)** Arătați că orice primitivă a funcției f este concavă pe $(0,+\infty)$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx$. Demonstrați că șirul $(I_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Prof. Ovidiu Badescu

Arătați că $n \in \mathbb{N}$ unde

$$n = \log_3(\sqrt{7}-2) + \log_3(\sqrt{7}+2)$$

E1) $n = \log_3(\sqrt{7}-2) + \log_3(\sqrt{7}+2)$

$$\Rightarrow n = \log_3\left((\sqrt{7}-2)(\sqrt{7}+2)\right) =$$

$$= \log_3(7-4) = \log_3 3 = 1 \in \mathbb{N}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți coordonatele pct de $\cap$ dintre G_f și G_g pt $f(x)=2x-1$ și $g(x)=x^2+6x+3$

E_1) rezolvăm sistemul $\begin{cases} y=2x-1 \\ y=x^2+6x+3 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x-1=x^2+6x+3 \Rightarrow x^2+4x+4=0$

$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm 0}{2}=-2$

E_2) $x=-2$ și $y=2x-1 \Rightarrow y=-5 \Rightarrow A(-2,-5)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ec.:

$$(x+2)^3=(2-x)^3$$

$E_1)\ (x+2)^3=(2-x)^3 \mid \sqrt[3]{\cdots}$

$$\Rightarrow x+2=2-x \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Câte nr. naturale de 2 cifre distincte se pot forma cu elemente din $\{0; 2; 4; 6; 8\}$

E.) $N = \overline{ab}$, $a \neq b$

a poate fi $\{2; 4; 6; 8\}$ $\Rightarrow$ a are 4 v

b poate fi $\{0; 2; 4; 6; 8\} \setminus$ valoarea lui a

$\Rightarrow$ b are 4 var

a și b inde$

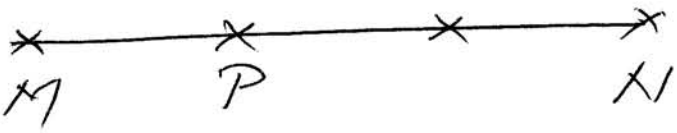
$\Rightarrow 4 \cdot 4 = 16$ numere

Prof. Ovidiu Bădescu

Dacă $2\overrightarrow{MN} + 3\overrightarrow{NP} = \vec{0}$, calculați lungimea lui MP dacă $MN = 3$

$E_1)$ $2\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{NP} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{PN}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{PN} \Rightarrow M, N, P$ coliniare sub forma



$E_2)$ $MN = 3 \Rightarrow MP = 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Arătați că:

$$\sin x + \sin(\pi - x) + \sin(\pi + x) + \sin(2\pi - x) = 0$$

$E_1)$ $\sin(\pi - x) = \underbrace{\sin\pi}_{0}\cos x - \underbrace{\cos\pi}_{-1}\sin x = \sin x$

$\sin(\pi + x) = \underbrace{\sin\pi}_{0}\cos x + \underbrace{\cos\pi}_{-1}\sin x = -\sin x$

$\sin(2\pi - x) = \underbrace{\sin 2\pi}_{0}\cos x - \underbrace{\cos 2\pi}_{1}\sin x = -\sin x$

$E_2)$ $\sin x + \sin(\pi - x) + \sin(\pi + x) + \sin(2\pi - x) =$

$= \sin x + \sin x - \sin x - \sin x = 0$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & x & y \\ x & 1 & y \end{pmatrix}$, a cărei

$$\det(A(2,3))=12$$

E1) $\det(A(2,3))=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}=12+18+1-4-6-9=$

$=31-19=12$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & x & y \\ x & 1 & y \end{pmatrix}$, arătați că

$\det(A(n^2,n)) \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

$E_1) \det(A(n^2,n)) = \begin{vmatrix} n^2 & n & 1 \\ 1 & n^2 & n \\ n^2 & 1 & n \end{vmatrix} \overset{L_3+L_2+L_1 \to L_1}{=}$

$= \begin{vmatrix} n^2+n+1 & n^2+n+1 & n^2+n+1 \\ 1 & n^2 & n \\ n^2 & 1 & n \end{vmatrix} \overset{\text{factor pe } L_1}{=}$

$= (n^2+n+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & n^2 & n \\ n^2 & 1 & n \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2-C_1 \to C_2 \\ C_3-C_1 \to C_3}}{=}$

$= (n^2+n+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & n^2-1 & n-1 \\ 1 & 1-n^2 & n-n^2 \end{vmatrix} =$

$= (n^2+n+1) \cdot (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} n^2-1 & n-1 \\ 1-n^2 & n-n^2 \end{vmatrix} =$

$= (n^2+n+1) \cdot \begin{vmatrix} n^2-1 & n-1 \\ -(n^2-1) & n(1-n) \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{factor pe } C_1 \\ \text{factor pe } C_2}}{=}$

$= (n^2+n+1)(n^2-1)(n-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & n \end{vmatrix} =$

$= (n^2+n+1)(n-1)(n+1)(n-1)(n+1) = (n^2+n+1)(n-1)^2(n+1)^2 \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & x & y \\ x & 1 & y \end{pmatrix}$, găsiți $x\in\mathbb{R}$

dacă inversa matricii $B=A(x,0)\cdot A(x,0)$

este matricea $A(x,0)$

$E_1)$ $A(x,0)=\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ x & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $B=A(x,0)\cdot A(x,0)=\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ x & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ x & 1 & 0 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} x^2+x & 1 & x \\ 2x & x^2 & 1 \\ x^2+1 & x & x \end{pmatrix}$

$E_3)$ Ar trebui ca $B^{-1}=A(x,0) \Leftrightarrow \begin{cases} B\cdot B^{-1}=I_3 \\ B^{-1}\cdot B=I_3 \end{cases}$

$B\cdot A(x,0)=I_3$ și $A(x,0)\cdot B=I_3$

$E_4)$ $B\cdot A(x,0)=I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2+x & 1 & x \\ 2x & x^2 & 1 \\ x^2+1 & x & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ x & 1 & 0 \end{pmatrix}=I_3$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^3+2x^2+1 & 2x & x^2+x \\ 3x^2+x & x^3+1 & 2x \\ x^3+x^2+2x & x^2+x & x^2+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+2x^2+1=1 \\ 2x=0 \\ x^2+x=0 \\ x^2+1=1 \end{cases} \Rightarrow x=0$

$x=0$ verifică toate celelalte relații $\Rightarrow x=0$ e OK

și $B\cdot A(x,0)=I_3$

$E_5)$ $x=0 \Rightarrow A(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2(0,0)=B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

și $A(0,0)\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{x=0}$ CORECT

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = nX^n + X^2 - nX - 1$, $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$

Se cere $f(1) = 0$

E,) $f(1) = n + 1 - n - 1 \Rightarrow f(1) = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = nX^n + X^2 - nX - 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$

Dacă n impar, $n \geq 3$, să se arate $f \vdots (x^2-1)$

E_1) $f \vdots g \Leftrightarrow$ toate rădăcinile lui g sunt rădăcini ale lui f

E_2) $g(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

E_3) $f(1) = n + 1 - n - 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow x = 1$ e rădăcină a lui f

$f(-1) = n(-1)^n + (-1)^2 - n(-1) - 1$, n impar $\Rightarrow (-1)^n = -1$

$\Rightarrow f(-1) = -n + 1 + n - 1 \Rightarrow f(-1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -1$ e rădăcină a lui f

E_4) Toate rădăcinile lui g sunt rădăcini ale lui $f \Rightarrow f \vdots g$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = nX^n + X^2 - nX - 1$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$, arătați că f nu are rădăc în $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

E_1) (R.A.) Pp. f are rād $\in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ și cum singurele rădăcini raționale sunt printre $\frac{\Delta_{\text{termen liber}}}{\Delta_{\text{coef. dominant}}}$

$\Rightarrow$ rād α este printre $\frac{\Delta_{-1}}{\Delta_n} = \frac{\{\pm 1\}}{d}$ unde d este un divizor al lui n, $d \neq \pm 1$, $d \in \mathbb{Z}$

E_2) Putem presupune că $d \in \mathbb{N}$ (căci dacă d întreg negativ, semnul „$-$" îl trecem la numărător)

$\Rightarrow$ posibilele rād din $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ sunt de forma $\alpha = \frac{1}{d}$ sau $\alpha = \frac{-1}{d}$ unde $d \in \mathbb{N}$, $d \neq 1 \Rightarrow d \geq 2$

E_3) Dacă $\alpha = \frac{1}{d}$ rād $\Rightarrow f(\alpha) = 0 \Rightarrow n\left(\frac{1}{d}\right)^n + \left(\frac{1}{d}\right)^2 - n \cdot \frac{1}{d} - 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{n}{d^n} + \frac{1}{d^2} - \frac{n}{d} - 1 = 0 \mid \cdot d^n \Rightarrow n = d^n + nd^{n-1} + d^{n-2}$

$\Rightarrow n = d^{n-2}(d^2 + nd + 1) \Rightarrow d^{n-2} \mid n$ și cum $n \geq 5$ și $d \in \mathbb{N}$, $d^{n-2} \leq n$

Dar, $d \geq 2 \Rightarrow d^{n-2} \geq 2^{n-2}$ $\Rightarrow 2^{n-2} \leq d^{n-2} \leq n$

$\Rightarrow 2^{n-2} \leq n$ fals, $\forall n \geq 5$

E_4) Dacă $\alpha = -\frac{1}{d}$ rād $\Rightarrow f(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{n}{d^n} \cdot (-1)^n + \frac{1}{d^2} + \frac{n}{d} - 1 = 0$

$\Rightarrow n \cdot (-1)^n + d^{n-2} + nd^{n-1} - d^n = 0 \Rightarrow n(-1)^n = d^{n-2}(d^2 - d - 1)$

$\Rightarrow d^{n-2} \mid n \Rightarrow d^{n-2} \leq n$ și discuția e similară

E_5) $\Rightarrow f$ nu are rād $\in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$, arătați că

$$f'(x) = -\frac{x^2}{x^2+1}$$

Ex) $f'(x) = (\operatorname{arctg} x - x)' = \frac{1}{x^2+1} - 1 = \frac{1-x^2-1}{x^2+1} = -\frac{x^2}{x^2+1}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = \operatorname{arctg} x - x$, se cere ec. as. oblice la G_f spre ∞

$E_1)$ $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x} \overset{\frac{\pi}{2}-\infty}{\underset{\infty}{=}} \overset{l'H}{=}$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2+1} - 1}{1} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2+1} - 1\right) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x^2-1}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{-x^2}{x^2+1} = -1 \in \mathbb{R}$

$E_2)$ $n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} (\operatorname{arctg} x - x + x) =$

$= \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arctg} x \overset{\operatorname{arctg}\infty = \frac{\pi}{2}}{=} \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$

$E_3)$ ec. as. este $y = mx + n \Leftrightarrow \boxed{y = -x + \frac{\pi}{2}}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\operatorname{arctg} x-x$ si $g(x)=\operatorname{arctg} x+x$

Se cere: $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$E_1)$ $f(x)+g(x)=\operatorname{arctg} x-x+\operatorname{arctg} x+x=$

$=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x$

$E_2)$ Fie $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x$

$h'(x)=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}=0\Rightarrow h(x)=k,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$h(1)=\operatorname{arctg} 1+\operatorname{arcctg} 1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow h(x)=\frac{\pi}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow f(x)+g(x)=\frac{\pi}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=e^{-x^2}$

Se cere: $\int_0^1 f(\sqrt{x})\,dx=\frac{e-1}{e}$

$\mathcal{E}_1)\ I=\int_0^1 f(\sqrt{x})\,dx=\int_0^1 e^{-(\sqrt{x})^2}\,dx=\int_0^1 e^{-x}\,dx=$

$=\frac{e^{-x}}{-1}\Big|_0^1=-\frac{1}{e^x}\Big|_0^1=-\left(\frac{1}{e}-1\right)=1-\frac{1}{e}=$

$=\frac{e-1}{e}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=e^{-x^2}$, arătați că orice primit. a funcției f este concavă pe $(0;\infty)$

E_1) Fie $F(x)$ o primit oarecare pt $f(x)$

$\Rightarrow F'(x)=f(x) \Rightarrow F'(x)=e^{-x^2}$

E_2) Vom arăta că $F''(x)\leq 0 \Rightarrow F$ concavă

E_3) $F''(x)=(e^{-x^2})'=e^{-x^2}\cdot 2x<0,\ \forall x\in(0;\infty)$

$\Rightarrow F$ strict concavă pe $(0;\infty)\Rightarrow$

F concavă pe $(0;\infty)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = e^{-x^2}$ și $I_n = \int_{1/n}^{1} f(x)dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Arătați că I_n convergent

E_1) <u>monotonia</u>: $I_{n+1} - I_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{1} f(x)dx - \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(x)dx =$

$= \int_{\frac{1}{n+1}}^{1/n} f(x)dx = \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} e^{-x^2}dx > 0$, pt că $e^{-x^2} > 0$

$\Rightarrow \boxed{I_n \searrow \nearrow}$ (1)

E_2) <u>mărginirea</u>:

Din $I_n \searrow \nearrow \Rightarrow I_n \geq I_1 \Rightarrow I_n$ mărg inferior

$x \in [\frac{1}{n}; 1]$ și $e^{-x^2} = \frac{1}{e^{x^2}} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow I_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} 1\,dx = x\Big|_{\frac{1}{n}}^{1} = 1 - \frac{1}{n} < 1$

$\Rightarrow I_n \leq 1 \Rightarrow I_1 \leq I_n \leq 1 \Rightarrow \boxed{I_n \text{ mărginit}}$ (2)

E_3) Din (1)+(2) $\Rightarrow I_n$ convergent

Prof. Ovidiu Bădescu