Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii **Varianta 10**

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați primul termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_3=10$ și rația $r=3$.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1,3)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+2m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale pare, de două cifre distincte, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,2)$ și $B(2,4)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului AB.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului dreptunghic ABC care are catetele $AB=8$ și $AC=6$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 2x+5\\ 5 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(-2))=-4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)+A(-x)=A(2017)+A(-2017)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele reale p și q, pentru care $A(0)\begin{pmatrix}p\\ q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\ 6\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+6x+6y+30$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=(x+6)(y+6)-6$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $e=-5$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $x\circ(-2017)=2017\circ(-6)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{2}{x}+\ln x\geq 1+\ln 2$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2}{2x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 2xf(x)\,dx=\frac{13}{3}$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f, pentru care $F(1)=1$.

5p **c)** Demonstrați că $2\int_1^n\left(f(x)+xf'(x)\right)dx=n^2-1$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți a_1 pt progr aritm dacă $a_3 = 10$ și $r = 3$

E1) a_n p.a. $\Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r$

$\Rightarrow a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow 10 = a_1 + 2 \cdot 3$

$\Rightarrow a_1 = 10 - 6 \Rightarrow a_1 = 4$

Prof. Ovidiu Bădescu

$m = ?$, $m \in \mathbb{R}$ dacă $A(1;3) \in G_f$ unde

$f(x) = x^2 - mx + 2m$

$E_1)$ $A(1;3) \in G_f \Leftrightarrow f(1) = 3 \Leftrightarrow 1 - m + 2m = 3$

$\Leftrightarrow 1 + m = 3 \Leftrightarrow m = 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$: $4^x + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

E_1) ec. devine $4^x \overset{2)}{=} \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \Rightarrow 4^x = \frac{1}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4^x = 4^{-1}$

E_2) cum $f(x) = 4^x$ e inj $\Rightarrow x = -1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Câte numere naturale pare de două cifre distincte, au cifrele elemente din $\{1;2;3;4\}$

E1) m. sunt $\overline{ab}$ cu $a \neq b$ și b par

Caz I: $b = 2 \Rightarrow a$ are 3V

Caz II: $b = 4 \Rightarrow a$ are 3V

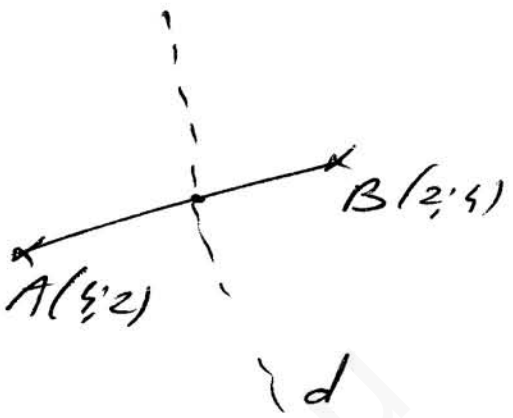
în total sunt 6 numere

Obs.: le puteam scrie și luam punctaj maxim:

12; 32; 42; 14; 24; 34 $\Rightarrow$ 6 numere

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(4;2)$, $B(2;4)$, să se scr. ec. mediatoarei lui AB



E_1) d mediatoarea lui AB

$\Leftrightarrow d \perp AB$ și d trece prin mijlocul lui AB

E_2) M mijl lui $AB \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{4+2}{2} = 3 \\ y_M = \frac{2+4}{2} = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow M(3;3)$

E_3) $d \perp AB \Rightarrow m_d \cdot m_{AB} = -1$

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{4-2}{2-4} = \frac{2}{-2} = -1$$

$\Rightarrow m_d \cdot (-1) = -1 \Rightarrow m_d = 1$

E_4) Știm $M(3;3)$ și $m_d = 1 \Rightarrow$ ec. lui d este

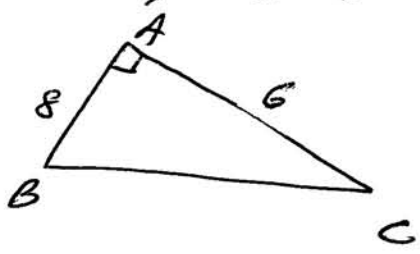
$y - y_M = m_d(x - x_M) \Leftrightarrow y - 3 = 1(x-3)$

$\Leftrightarrow y - 3 = x - 3 \Leftrightarrow y = x$

$\Leftrightarrow x - y = 0$

Prof. Ionuț Badescu

Se cere raza cercului circumscris ΔABC dacă ΔABC dreptunghic cu catetele $AB=8$ și $AC=6$



---

met I: ΔABC dreptunghic

$\Rightarrow R=\frac{ip}{2} \Rightarrow R=\frac{BC}{2}$

$BC^2=AB^2+AC^2 \Rightarrow BC^2=64+36 \Rightarrow BC=10$

$\Rightarrow R=\frac{10}{2} \Rightarrow R=5$

---

met II: $R=\frac{abc}{4S}$

$a=BC=10$, $S=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{8\cdot 6}{2}=24$

$\Rightarrow R=\frac{10\cdot 6\cdot 8}{4\cdot 24}=\frac{480^{\backslash 48}}{96}=\frac{10}{2}=5$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 2x+5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, a cere

$$\det(A(-2))=-4$$

E1) $\det(A(-2))=\begin{vmatrix} 1 & -4+5 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}=1-5=-4$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 2x+5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, x care

$$A(x)+A(-x)=A(2017)+A(-2017),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$E_1)$ $M_1=A(x)+A(-x)=\begin{pmatrix} 1 & 2x+5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -2x+5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$E_2)$ $M_d=A(2017)+A(-2017)=\begin{pmatrix} 1 & 2\cdot 2017+5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2\cdot(-2017)+5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 2 & 2\cdot 2017+2\cdot(-2017)+10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 10 & 2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$E_3)$ Deci $(1)+(2)\Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 2x+5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, să se afle $p, q=?$ dacă

$$A(0)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix}$$

E1) $A(0)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p+5q \\ 5p+q \end{pmatrix}$

E2) Dar, $A(0)\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} p+5q=6 \\ 5p+q=6 \end{matrix} \right| \cdot 5$$

„-": $24q=24 \Rightarrow \boxed{q=1}$ înlocuim

$\Rightarrow p+5q=6 \Rightarrow p+5=6 \Rightarrow \boxed{p=1}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $x \circ y = xy+6x+6y+30$, se cere

$x \circ y = (x+6)(y+6)-6$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$E_1)$ $(x+6)(y+6)-6 = xy+6x+6y+36-6 =$

$= xy+6x+6y+30 = x \circ y$

$E_2)$ Așadar, $x \circ y = (x+6)(y+6)-6$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = xy + 6x + 6y + 30$, arătați că $e = -5$ este elementul neutru al lui $\circ$

E_1) Calculăm el. neutru

$\exists e \in \mathbb{R}$ a.î. $\forall x \in \mathbb{R}$ să avem $x \circ e = e \circ x = x$

E_2) $x \circ e = x \Rightarrow xe + 6x + 6e + 30 = x$

$\Rightarrow e(x+6) = x - 6x - 30$

$e(x+6) = -5x - 30$

$e(x+6) = -5(x+6)$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow e = -5$ (1)

E_3) arăt. că $\circ$ comutativă:

$\forall x, y \in \mathbb{R} \overset{(?)}{\Rightarrow} x \circ y = y \circ x$

$x \circ y = xy + 6x + 6y + 30$

$y \circ x = yx + 6y + 6x + 30$ $\Rightarrow$ egalitate

E_4) Din $\circ$ comut $\Rightarrow x \circ e = e \circ x$ (2)

E_5) Din (1) + (2) $\Rightarrow e = -5$ el. neutru al lui $\circ$ pe $\mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = xy + 6x + 6y + 30$, se știe relația $x \circ y = (x+6)(y+6) - 6$, $\forall x \in \mathbb{R}$ dacă:

$$x \circ (-2017) = 2017 \circ (-6)$$

E_1) cu forma restrânsă

$$x \circ (-2017) = (x+6)(-2017+6) - 6 =$$

$$= (x+6)(-2011) - 6$$

și

$$2017 \circ (-6) = (2017+6)(-6+6) - 6 =$$

$$= 2023 \cdot 0 - 6 = -6$$

E_2) Egalând $\Rightarrow (x+6)(-2011) - 6 = -6$

$$\Leftrightarrow (x+6) \cdot (-2011) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -6$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x) = \frac{2}{x} + \ln x$, $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$

Se cere $f'(x) = \frac{x-2}{x^2}$

Rez: $f'(x) = \left(\frac{2}{x} + \ln x\right)' = \frac{2' \cdot x - 2 \cdot x'}{x^2} + \frac{1}{x} =$

$= \frac{0-2}{x^2} + \frac{1}{x} = -\frac{2}{x^2} + \frac{x}{x \cdot 1} = \frac{x-2}{x^2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$, să se scrie ec. tg în $x=1$ la G_f

---

E_1) ec. tg în $x=a$ este $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$\Rightarrow y-f(1)=f'(1)(x-1)$

E_2) $f(1)=\frac{2}{1}+\ln 1=2+0=2$

$f'(1)=?$

$f'(x)=\left(\frac{2}{x}+\ln x\right)'=2\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}$

$\Rightarrow f'(1)=2\cdot(-1)+1=-2+1=-1$

E_3) ec. tg este:

$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow$

$y-2=-1(x-1)\Leftrightarrow y-2=-x+1$

$\Leftrightarrow \boxed{x+y-3=0}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\frac{2}{x}+\ln x$, să cere $\frac{2}{x}+\ln x \geq 1+\ln 2$,

$\forall x \in (0;\infty)$

$E_1)$ $f'(x)=2\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)+\frac{1}{x}=\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-2+x}{x^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=2$

$E_2)$

x	0		2	
f'	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nexists$	$\searrow$	$1+\ln 2$	$\nearrow$

$f'(x)<0$ pe $(0;2) \Rightarrow f_1 \searrow$ pe $(0;2)$

$f'(x)>0$ pe $(2;\infty) \Rightarrow f_1 \nearrow$ pe $(2;\infty)$

$f(2)=\frac{2}{2}+\ln 2=1+\ln 2$

$E_3)$ Din tabelul de variație $\Rightarrow f(x)\geq 1+\ln 2$

$\Rightarrow \frac{2}{x}+\ln x \geq 1+\ln 2, \forall x \in (0;\infty)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{x^2+2}{2x}$, să se arate $\int_1^2 2x f(x)\,dx=\frac{13}{3}$

E1) $I=\int_1^2 2x\cdot\frac{x^2+2}{2x}\,dx=\int_1^2 (x^2+2)\,dx=$

$=\frac{x^3}{3}\Big|_1^2+2x\Big|_1^2=\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)+2(2-1)=$

$=\frac{7}{3}+2=\frac{7+6}{3}=\frac{13}{3}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{x^2+2}{2x}$, $x>0$ și primit. F a funcției f dacă $F(1)=1$

E1) $F(x)=\int f(x)dx=\int \frac{x^2+2}{2x}dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{x^2}{x}+\frac{2}{x}\right)dx=$

$=\frac{1}{2}\int\left(x+\frac{2}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}+2\cdot\ln|x|\right)+C=$

$=\frac{x^2}{4}+\ln|x|+C$

E2) Dar, $F(1)=1\Rightarrow \frac{1}{4}+\ln|1|+C=1$

$\Rightarrow \frac{1}{4}+0+C=1\Rightarrow C=1-\frac{1}{4}$

$\Rightarrow C=\frac{3}{4}$

$\Rightarrow F(x)=\frac{x^2}{4}+\ln|x|+\frac{3}{4}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{x^2+2}{2x}$, arătați că

$$2\int_1^n (f(x)+xf'(x))dx = n^2-1,\ \forall n\geq 2$$

$E_1)$ $2\int_1^n (f(x)+xf'(x))dx = 2\int_1^n (xf(x))'dx$

$E_2)$ Dar, $\int_a^b g'(x)dx = g(x)\Big|_a^b \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\int_1^n (xf(x))'dx = 2\cdot xf(x)\Big|_1^n =$$

$$= 2(nf(n)-1f(1)) = 2\left(n\cdot\frac{n^2+2}{2n}-1\cdot\frac{1+2}{2}\right)$$

$$= 2\left(\frac{n^2+2}{2}-\frac{3}{2}\right) = n^2+2-3 = n^2-1$$

Obs.: trebuia să fim suficient de deștepți să observăm că $\boxed{f(x)+xf'(x)=(xf(x))'}$

altfel ....

Prof. Ovidiu Bădescu