Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 4

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1=3+2i$ și $z_2=3-2i$. Arătați că numărul z_1+z_2 este real.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $M(2,m)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x-5}=3^{-2}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,20\}$, acesta să fie multiplu de 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$, $B(1,3)$ și $C(m,1)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că punctul C aparține dreptei AB.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\cos\frac{x}{2}+\sin x$, unde x este număr real. Arătați că $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x & x+1 & 1\\ 2 & x & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Determinați numărul real x, pentru care $A(x)+A(x+2)=2A(2)$.

5p **c)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(n,n+1)$, $N(2,n)$ și $P(3,0)$. Determinați numărul natural n, știind că punctele M, N și P sunt coliniare.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+X-1$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(1)-f(-1)=4$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Pentru $a=2$, calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+X+1.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $x_1+x_2+x_3+x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=x_1x_2x_3-1$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{e^x+1}=0$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+2x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1(f(x)-2x)\,dx=e-1$.

5p **b)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-e^x$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $\int_0^a xf(x)\,dx=1+\frac{2a^3}{3}$.

Fie $z_1 = 3+2i$, $z_2 = 3-2i$, să se arate că: $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$

E.1) $z_1 + z_2 = (3+2i) + (3-2i) = 6 \in \mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Bădescu

$m = ?$ dacă $M(2, m) \in G_f$ pentru

$f(x) = x^2 - 3$

$E_1) \; M(2, m) \in G_f \Leftrightarrow f(2) = m \Leftrightarrow 4 - 3 = m$

$\Leftrightarrow m = 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$3^{3x-5} = 3^{-2}$$

$E_1)$ $3^{3x-5} = 3^{-2}$

Cum $f(x) = 3^x$ e inj $\Rightarrow 3x-5 = -2$

$\Leftrightarrow 3x = 3$

$\Leftrightarrow x = 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați probabilitatea ca alegând un număr din $A=\{1;2;...;20\}$, acesta să fie multiplu de 5

E1) $P=\dfrac{\text{n. caz favorabile}}{\text{n. caz posibile}}$

E2) <u>n. caz posibile</u>: numărul de elemente din A, adică 20

E3) <u>n. caz favorabile</u>: multipli de 5 din A adică 5; 10; 15; 20 $\Rightarrow$ 4 elemente

E4) $P=\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(2;5)$, $B(1;3)$, $C(m,1)$. Se cere $m=?$ dacă $C \in AB$

$E_1)$ $AB: \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 5x+y+6-5-3x-2y=0$

$\Leftrightarrow 2x-y+1=0$

$E_2)$ $C \in AB \Rightarrow 2m-1+1=0 \Rightarrow 2m=0 \Rightarrow m=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $E(x) = \cos\frac{x}{2} + \sin x$, unde

$$E\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

E1) $E\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{6} + \sin\frac{4\pi}{3} = \cos 30^\circ + \sin 60^\circ =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} x & x+1 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

să se arate $\det(A(0))=1$

E1) $\det(A(0))=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0+3+0-0-0-2=$

$=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} x & x+1 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se cere $x=?$ dacă $A(x)+A(x+2)=2A(2)$

$E_1)$ $A(x)+A(x+2)=\begin{pmatrix} x & x+1 & 1 \\ 2 & x & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x+2 & x+3 & 1 \\ 2 & x+2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 2x+2 & 2x+4 & 2 \\ 4 & 2x+2 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (1)

$E_2)$ $2A(2)=2\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (2)

$E_3)$ Din (1)+(2) $\Rightarrow$
$\begin{cases} 2x+2=4 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \\ 2x+4=6 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \\ 2x+2=4 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \\ 2=2 \\ 4=4 \\ 6=6 \end{cases}$

$\Rightarrow x=1$

Prof. Ovidiu Pădescu

Fie $M(n, n+1)$, $N(2, n)$, $P(3, 0)$, n cu $n \in \mathbb{N}$ dacă M, N, P coliniare

---

$\in$) M, N, P coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_N & y_N & 1 \\ x_M & y_M & 1 \\ x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} n & n+1 & 1 \\ 2 & n & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow n^2 + 3(n+1) + 0 - 3n - 0 - 2(n+1) = 0$

$\Leftrightarrow n^2 + 3n + 3 - 3n - 2n - 2 = 0$

$\Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 = 0 \Leftrightarrow n_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-4}}{2 \cdot 1} = 1 \in \mathbb{N}$

$S_f : n = 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + aX^2 + X - 1$ cu $a \in \mathbb{R}$

Sa se arate $f(1) - f(-1) = 4$, $\forall a \in \mathbb{R}$

Fie $f(1) - f(-1) = (1 + a + 1 - 1) - (-1 + a - 1 - 1) =$

$= (1 + a) - (a - 3) = 1 + a - a + 3 = 4$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + aX^2 + X - 1$, pentru $a = 2$ să se afle câtul și restul lui $f : (X^2 + X + 1)$

E,) $X^3 + 2X^2 + X - 1 \;\big|\; X^2 + X + 1$

$-X^3 - X^2 - X$ | $X + 1$

$X^2 \quad -1$

$-X^2 - X - 1$

$-X - 2$

$\Rightarrow$ câtul $C(X) = X + 1$

restul $R(X) = -X - 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + aX^2 + X - 1$, $a \in \mathbb{R}$ dacă

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = x_1x_2x_3 - 1$$

E_1) Deoarece $\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a}{1} = -a \\ S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{1}{1} = 1 \\ S_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{-1}{1} = 1 \end{cases}$

relație din ipoteză devine

E_2) $S_1 + S_2 = S_3 - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -a + 1 = 1 - 1 \Leftrightarrow -a + 1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{a = 1}$

Prof. Ovidiu Băescu

Fie $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$, se cere

$$f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

E1) $f'(x)=\frac{(x^2-x+1)'(x-1)-(x^2-x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=$

$=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)}{(x-1)^2}=$

$=\frac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$, să se scr. ec. tg la Gf în punctul de abscisă $x=2$

E_1) ec. tg în $x=a$ este $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$\Rightarrow y-f(2)=f'(2)(x-2)$

E_2) $f(2)=\frac{4-2+1}{2-1}=3$

$f'(2)=?$

$f'(x)=\frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}=$

$=\frac{2x^2-3x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

$f'(3)=\frac{9-6}{2^2}=\frac{3}{4}$

E_3) ec. tg: $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow$

$y-3=\frac{3}{4}(x-2)\ |\cdot 4$

$4y-12=3x-6\Leftrightarrow \boxed{3x-4y+6=0}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$, x cere

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{e^x+1}=0$$

E1) $l=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{x^2-x+1}{x-1}}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+1}{(x-1)(e^x+1)}\overset{\frac{\infty}{\infty\cdot\infty}}{\underset{l'H}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x-1}{1\cdot(e^x+1)+(x-1)\cdot e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{e^x+1\cdot e^x+(x-1)\cdot e^x}\overset{\frac{2}{\infty}}{=}0$

Prof. Ovidiu Bagesu

Fie $f(x)=e^x+2x$, să se

$$\int_0^1 (f(x)-2x)\,dx = e-1$$

$\mathcal{E}_1)$ $I=\int_0^1 (f(x)-2x)\,dx=\int_0^1 (e^x+2x-2x)\,dx=$

$$=\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e^1-e^0=e-1$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = e^x + 2x$, să se afle volumul corpului obținut prin rotirea în jurul lui Ox a G_f unde $g: [0;1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - e^x$

$$E_1) \quad V(C_g) = \pi \int_a^b g^2(x)\,dx =$$

$$= \pi \int_0^1 (e^x + 2x - e^x)^2\,dx =$$

$$= \pi \int_0^1 4x^2\,dx = 4\pi \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{4\pi}{3}(1-0) = \frac{4\pi}{3}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=e^x+2x$, să se arate că $a\in\mathbb{R}$ dacă

$$\int_0^a x\cdot f(x)\,dx = 1+\frac{2a^3}{3}$$

$E_1)$ $I=\int_0^a x\cdot(e^x+2x)\,dx=\int_0^a (xe^x+2x^2)\,dx=$

$=\int_0^a xe^x\,dx+2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^a$

$E_2)$ $I_1=\int_0^a xe^x\,dx$

$f(x)=x\Rightarrow f'(x)=1$

$g'(x)=e^x\Rightarrow g(x)=e^x$

$I_1=x\cdot e^x\Big|_0^a-\int_0^a e^x\,dx=$

$=ae^a-0\cdot e^0-e^x\Big|_0^a=$

$=ae^a-(e^a-e^0)=ae^a-e^a+1$

$E_3)$ din $(*)\Rightarrow I=ae^a-e^a+1+\frac{2}{3}(a^3-0)$

$E_4)$ Dar, $I=1+\frac{2a^3}{3}\Rightarrow$

$e^a(a-1)+\frac{2}{3}a^3+1=1+\frac{2a^3}{3}$

$e^a(a-1)=0\Rightarrow$ $e^a=0$ sau $a-1=0\Rightarrow \boxed{a=1}$ (fals pt că $e^a>0,\ \forall a\in\mathbb{R}$)

Prof. Ovidiu Bădescu