Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=4$ și $a_2=7$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-4x+1=0$. Arătați că $4x_1x_2-(x_1+x_2)=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1}=\frac{1}{8}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 15.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(1,1)$ și $C(3,a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctele A, B și C sunt coliniare.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=4\sqrt{3}$, $AC=4$ și $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculați $\sin B$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}0 & x\\ x & 0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=xyI_2$, pentru orice numere reale x și y, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $A(3^a)A(3^{a+1})A(3^{a+2})=A(27)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+mX^2+2X-4$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=1$, arătați că $f(1)=0$.

5p **b)** Arătați că, dacă polinomul f se divide cu $X+2$, atunci restul împărțirii lui f la $X+3$ este egal cu -1.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+x_1+x_2+x_3=\frac{1}{2}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+2017}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{-(x+2016)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $[-2015,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\frac{1}{f(x)}dx=\frac{4}{3}$.

5p **b)** Determinați primitiva F a funcției f, știind că $F(1)=\frac{\pi}{4}+1$.

5p **c)** Determinați numărul natural n, știind că $\int_0^n xf(x)dx=\frac{1}{2}\ln 5$.

Prof. Ovidiu Bădescu

11/2/2017 / Vz
1/1

Găsiți a_3 știind că $a_1 = 4$ și $a_2 = 7$

$E_1)$ $a_2 = a_1 + r \Rightarrow 7 = 4 + r \Rightarrow r = 3$

$E_3)$ $a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow$

$\Rightarrow a_3 = 4 + 2 \cdot 3 \Rightarrow a_3 = 10$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie x_1, x_2 reale a.i. $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Să se arate că $4x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 0$

$E_1)$ $4x_1x_2 - (x_1 + x_2) = 4P - S$

$E_2)$ $P = \frac{c}{a} = \frac{1}{1} = 1$

$S = -\frac{b}{a} = \frac{4}{1} = 4$

$E_3)$ $4P - S = 4 \cdot 1 - 4 = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

M2/2017/V2

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$2^{2x+1} = \frac{1}{8}$$

E_1) ec devine: $2^{2x+1} = 2^{-3}$ $\Big\}\Rightarrow$

E_2) deoarece $f(x) = 2^x$ inj

$\Rightarrow 2x+1 = -3 \Rightarrow 2x = -4$

$\Rightarrow x = -2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați probabilitatea ca alegând un număr natural de două cifre, acesta să fie multiplu de 15

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile: toate nr. naturale de două cifre $\overline{ab}$ cu $a \to 9$ v
$b \to 10$ v
cinci
90 numere

$E_3)$ nr. caz favorabile: toți multiplii de 15 de două cifre, $\overline{ab} \in \{15; 30; 45; 60; 75; 90\}$ adică 6 numere

$E_4)$ $P = \dfrac{6}{90} = \dfrac{1}{15}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(3,a)$, să se arate că $a \in \mathbb{R}$ dacă A, B, C coliniare

---

$E_1)$ A, B, C coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$

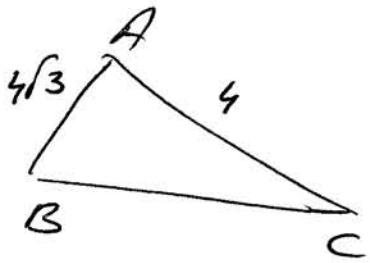
$E_2)$ $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & a & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 0 + 3 + a - 3 - 0 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

M2 (2019) v2
5/6

Calculați $\sin B$ dacă $AB=4\sqrt{3}$, $AC=4$ și $\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$



E_1) din T. sinusurilor

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \text{ alegem}$$

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{4}{\sin B}=\frac{4\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{\sin B}=4\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{4}{\sin B}=8$$

$$\Leftrightarrow \sin B=\frac{4}{8} \Leftrightarrow \sin B=\frac{1}{2}$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$, x cere $\det(A(1))=-1$

$E_1)$ $\det(A(1))=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0-1=-1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$, x cere

$$A(x)\cdot A(y)=xy\,I_2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$$

$E_1)$ $A(x)A(y)=\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & y \\ y & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix}$ (1)

$E_2)$ $xy\,I_2=xy\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix}$ (2)

$E_3)$ Din (1) + (2) $\Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$, se știe că $A(x)A(y)=xyI_2$,

se cere $a=?$ dacă $A(3^a)A(3^{a+1})A(3^{a+2})=A(27)$

E_1) Din $A(x)A(y)=xyI_2 \Rightarrow$

$$A(x)A(y)A(z)=(xyI_2)\cdot A(z)=xyA(z)=$$

$$=xy\begin{pmatrix} 0 & z \\ z & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & xyz \\ xyz & 0 \end{pmatrix}=A(xyz)$$

E_2) ec. din enunț devine

$$A(3^a\cdot 3^{a+1}\cdot 3^{a+2})=A(27)$$

$$\Leftrightarrow A(3^{3a+3})=A(3^3)$$

$$\Leftrightarrow 3^{3a+3}=3^3 \Leftrightarrow 3a+3=3 \Leftrightarrow a=0$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + mX^2 + 2X - 4$, pentru $m = 1$, a cere

$$f(1) = 0$$

$E_1)$ $m = 1 \Rightarrow f = X^3 + X^2 + 2X - 4$

$E_2)$ $f(1) = 1 + 1 + 2 - 4 = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 + mX^2 + 2X - 4$, arătați că dacă f se divide cu $X+2$, atunci restul lui $f:(X+3)$ este egal cu -1

E_1) f se divide cu $(X+2) \Leftrightarrow f \vdots (X+2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(-2) = 0$

$\Rightarrow -8 + 4m - 4 - 4 = 0 \Leftrightarrow 4m = 16 \Rightarrow m = 4$

E_2) $m = 4 \Rightarrow f = X^3 + 4X^2 + 2X - 4$

E_3) restul $f:(X-a)$ este $f(a) \Rightarrow$

restul $f:(X+3)$ este $f(-3) = -27 + 36 - 6 - 4 = -37 + 36 = -1$

$\Rightarrow$ restul este -1

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f = X^3 + mX^2 + 2X - 4$, $m = ?$ dacă

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2}$$

E_1) relația dată $\overset{x_2x_3 \quad x_1x_3 \quad x_1x_2}{\Leftrightarrow} \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + x_1 + x_2 + x_3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} + (x_1 + x_2 + x_3) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{S_2}{S_3} + S_1 = \frac{1}{2}$$

E_2) Din VIETE $\Rightarrow S_1 = -\frac{m}{1} = -m$

$$S_2 = \frac{2}{1} = 2$$

$$S_3 = -\frac{-4}{1} = 4$$

E_3) înlocuim în (*) $\Rightarrow \frac{2}{4} - m = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - m = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow m = 0$$

Prof. Ovidiu Badescu

Ex $f(x) = \frac{x+2017}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = -\frac{(x+2016)}{e^x}$

Ex) $f'(x) = \frac{(x+2017)' e^x - (x+2017)(e^x)'}{(e^x)^2} =$

$= \frac{1 \cdot e^x - (x+2017) e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x(1-x-2017)}{(e^x)^2} =$

$= \frac{-x-2016}{e^x} = \frac{-(x+2016)}{e^x}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\frac{x+2017}{e^x}$, să se scrie ec. tg la G_f în $x=0$

E_1) ec. tg în $x=a$ este $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$\Rightarrow$ în $x=0$ este: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

E_2) $f(0)=\frac{0+2017}{e^0}=2017$

$f'(0)=?$

$$f'(x)=\frac{1\cdot e^x-(x+2017)e^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x(1-x-2017)}{(e^x)^2}=$$

$$=\frac{e^x(-x-2016)}{(e^x)^2}=\frac{-(x+2016)}{e^x}$$

$\Rightarrow f'(0)=\frac{-2016}{e^0}=-2016$

E_3) ec. tg este: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

$\Leftrightarrow y-2017=-2016x$

$\Leftrightarrow 2016x+y-2017=0$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\frac{x+2017}{e^x}$, arătați că f este convexă pe $[-2015;\infty)$

$E_1)$ Vom arăta că $f''(x)\geq 0$ pe $[-2015,\infty)$

$E_2)$ $f'(x)=\left(\frac{x+2017}{e^x}\right)'=\frac{(x+2017)'e^x-(x+2017)(e^x)'}{(e^x)^2}=$

$=\frac{1\cdot e^x-(x+2017)e^x}{(e^x)^2}=\frac{e^x(1-x-2017)}{(e^x)^2}=$

$=\frac{-x-2016}{e^x}$

$E_3)$ $f''(x)=\left(\frac{-x-2016}{e^x}\right)'=\frac{(-x-2016)'e^x-(-x-2016)(e^x)'}{(e^x)^2}=$

$=\frac{-1\cdot e^x+(x+2016)e^x}{(e^x)^2}=\frac{(-1+x+2016)e^x}{(e^x)^2}=$

$=\frac{x+2015}{e^x}$

$E_4)$ $f''(x)=0\Rightarrow x+2015=0\Rightarrow x=-2015$

x		-2015		
f''	$-\ -\ -\ -$	0	$+$	$+\ +\ +$
f	$\cap$		$\cup$	

$f''(x)\geq 0$ pe $[-2015;\infty)\Rightarrow f$ convexă pe $[-2015;\infty)$

Prof. Ciprian Băcescu

Fie $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, să se arate că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = \frac{4}{3}$

$E_1)$ $I = \int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx = \int_0^1 (x^2+1)\, dx =$

$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 = \left(\frac{1}{3} - 0\right) + (1-0) =$

$= \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, se cere o primitivă F a lui f cu

$$F(1)=\frac{\pi}{4}+1$$

E_1) Fie $F(x)=\int f(x)dx=\int \frac{1}{x^2+1}dx=\operatorname{arctg}x+C$

E_2) Trebuie o primitivă cu $F(1)=\frac{\pi}{4}+1$

$$\Rightarrow \operatorname{arctg}1+C=\frac{\pi}{4}+1\Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{4}+C=\frac{\pi}{4}+1\Rightarrow C=1$$

deci primitiva cerută este

$$\boxed{F(x)=\operatorname{arctg}x+1}$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$ Aflați $n\in\mathbb{N}$ dacă

$$\int_0^n x f(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln 5$$

$E_1)$ $I=\int_0^n x f(x)\,dx=\int_0^n \frac{x}{x^2+1}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^n \frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx=$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_0^n=\frac{1}{2}\left[\ln|n^2+1|-\ln|0+1|\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|n^2+1|-\ln 1\right]=\frac{1}{2}\ln(n^2+1)$$

$E_2)$ Dar, din ipoteză $\Rightarrow I=\frac{1}{2}\ln 5$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(n^2+1)=\frac{1}{2}\ln 5 \Rightarrow \ln(n^2+1)=\ln 5$

Dar, $f(x)=\ln x$ e injectivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow n^2+1=5 \Rightarrow n^2=4 \Rightarrow n=\pm 2$

Dar, $n\in\mathbb{N}$ $\Rightarrow \boxed{n=2}$

Prof. Ovidiu Badescu