Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numărul complex z, știind că $2z+\overline{z}=6+i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-5$. Calculați $f(1)+f(2)+f(3)+\ldots+f(10)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x+3)=1+\log_2(x+1)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifrele egale.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$ și $B(5,5)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $C(-2,6)$ și este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=3\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle ACB)=30^\circ$ și $m(\sphericalangle BAC)=45^\circ$. Determinați lungimea laturii BC.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & x\\ 4 & 9 & x^2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $A(1)-A(0)$.

5p **b)** Arătați că $\det(A(x))=(x-2)(x-3)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\det(A(a))\le\det(A(x))$, pentru orice număr real x.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=4xy-4x-4y+5$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=4(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $N=2016\circ 2017$ este pătratul unui număr natural.

5p **c)** Determinați numerele naturale a și b pentru care $a\circ b=13$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=x(2\ln x+1)$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $1+2ef(x)\ge 0$, pentru orice număr real x, $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)e^{-x}\,dx=-\frac{1}{2}$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $F(x)=(x+a)e^x$ este o primitivă a funcției f.

5p **c)** Arătați că $\int_0^1 x^3 f(x)\,dx\le-\frac{1}{20}$.

$z = ?$ dacă $2z + \bar{z} = 6 + i$

E_1) notăm $z = a + bi$ cu $a, b \in \mathbb{R}$

E_2) $2(a+bi) + a - bi = 6 + i$

$3a + bi = 6 + i$

E_3) $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 6 \Rightarrow a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow z = a + bi$ adică $z = 2 + i$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = 4x - 5$, calculați

$$f(1) + f(2) + \dots + f(10)$$

E1) $N = f(1) + f(2) + \dots + f(10) =$

$= (-1) + 3 + 7 + \dots + 35$

E2) e sumă de p.a. cu $a_1 = -1$, $a_n = 35$, și sunt 10 termeni $\Rightarrow S_{10} = \frac{(-1+35)\cdot 10}{2}$

$\Rightarrow S_{10} = 34 \cdot 5 = 170$

Prof. Ovidiu Băcăsoul

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\log_2(x+3) = 1 + \log_2(x+1)$$

E_1) Ec. devine: $\log_2(x+3) = \log_2 2 + \log_2(x+1)$

$\Rightarrow \log_2(x+3) = \log_2(2x+2)$ $\Big\} \Rightarrow$

E_2) Cum $f(x) = \log_2 x$ e inject

$\Rightarrow x+3 = 2x+2 \Rightarrow x = 1$ soluție posibilă

E_3) o verif în ec.:

$\log_2(1+3) = 1 + \log_2(1+1)$

$\hookrightarrow \log_2 4 = 1+1 \hookrightarrow 2 = 2$ adev

$\Rightarrow x = 1$ soluție

Prof. Ovidiu Bădescu

V S
3/4

Calculați probabilitatea ca alegând un număr de 2 cifre, acesta să aibă cifrele egale

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorab}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile: toate nr. de 2 cifre $\overline{ab}$ cu $a \to 9$ v, $b \to 10$ v cifre $\Rightarrow 9 \cdot 10 = 90$ numere

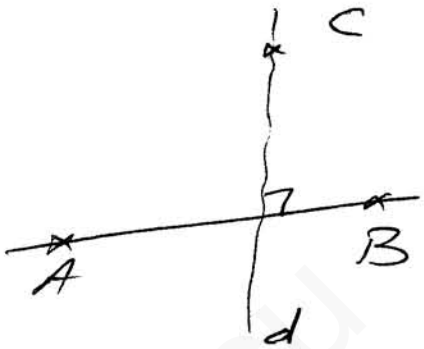
$E_3)$ nr. caz favorabile: $\overline{aa} \Rightarrow 9$ numere

$E_4)$ $P = \dfrac{9}{90} = \dfrac{1}{10}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(1;1)$ și $B(5;5)$, se cere ec. dreptei

ce trece prin $C(-2;6)$ și este perpend. pe AB



$E_1)$ $d \perp AB \Rightarrow m_d \cdot m_{AB} = -1$

$E_2)$ $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5-1}{5-1} = 1$

și $m_d \cdot m_{AB} = -1 \Rightarrow m_d = -1$

$E_3)$ Știm $C(-2;6)$ și $m_d = -1 \Rightarrow$ ec. lui d este

$$y - y_C = m_d(x - x_C) \Rightarrow y - 6 = -1(x+2)$$

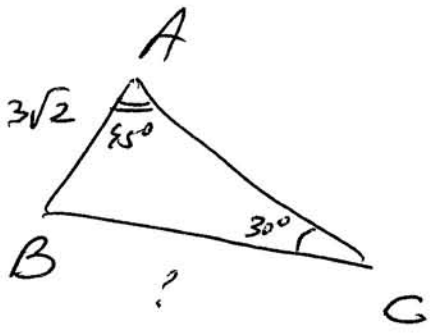
$$\Rightarrow y - 6 = -x - 2 \Rightarrow x + y - 4 = 0$$

Prof. Ovidiu Bădescu

VS VII
I 6

În ΔABC, $AB = 3\sqrt{2}$, $m(\hat{ACB}) = 30^\circ$, $m(\hat{BAC}) = 45^\circ$

Se cere lung. lui BC



E_1) T. sinusurilor

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$$

E_2) $\frac{3\sqrt{2}}{\sin 30^\circ} = \frac{BC}{\sin 45^\circ} \Rightarrow \frac{3\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\Rightarrow 6\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}} BC \Rightarrow BC = \frac{6\sqrt{2}}{\frac{2}{\sqrt{2}}} = 6\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 6$

$$BC = 6$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{pmatrix}$, calculați

$A(1)-A(0)$

E1) Fie $M=A(1)-A(0)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 9 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 9 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$

$\Rightarrow M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{pmatrix}$, arătați că

$$\det(A(x))=(x-2)(x-3),\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$E_1)\ \det(A(x))=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{vmatrix}=3x^2+4x+18-12-9x-2x^2$

$$=x^2-5x+6 \quad (1)$$

$E_2)\ (x-2)(x-3)=x^2-3x-2x+6=x^2-5x+6 \quad (2)$

$E_3)$ Din (1) și (2) $\Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Bădescu

VS XII

II 1c)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \end{pmatrix}$, se știe că

$\det(A(x))=(x-2)(x-3)$, determinați $a\in\mathbb{R}$

dacă $\det(A(a))\leq \det(A(x)), \forall x\in\mathbb{R}$

E_1) ar trebui ca $(a-2)(a-3)\leq(x-2)(x-3), \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow a^2-5a+6\leq x^2-5x+6, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2-5x-a^2+5a\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

E_2) folosim $ax^2+bx+c\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$

E_3) în cazul nostru, $x^2-5x-a^2+5a\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1>0 \text{ adev.} \\ \Delta\leq 0 \Rightarrow 25-4(-a^2+5a)\leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 25+4a^2-20a\leq 0 \Leftrightarrow 4a^2-20a+25\leq 0$

$$a_{1,2}=\frac{20\pm\sqrt{400-400}}{2\cdot 4}=\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$$

a		$\frac{5}{2}$	
$4a^2-20a+25$	+ + + + +	0	+ + + + +

$\Rightarrow 4a^2-20a+25\leq 0 \Leftrightarrow a=\frac{5}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = 4xy - 4x - 4y + 5$, arătați că

$$x \circ y = 4(x-1)(y-1)+1$$

E1) $4(x-1)(y-1)+1 = 4(xy - x - y + 1) + 1 =$

$= 4xy - 4x - 4y + 5 = x \circ y$

$\Rightarrow x \circ y = 4(x-1)(y-1)+1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = 4xy - 4x - 4y + 5$, știm că

$x \circ y = 4(x-1)(y-1) + 1$

Arătați că $N = 2016 \circ 2017$ este pătratul unui număr natural

---

E1) $N = 2016 \circ 2017 = 4 \cdot 2015 \cdot 2016 + 1 =$

$= 4 \cdot 2015 (2015 + 1) + 1 =$

$= 4 \cdot 2015^2 + 4 \cdot 2015 + 1 =$

$= (2 \cdot 2015)^2 + 2 \cdot (2 \cdot 2015) \cdot 1 + 1^2$

$= (2 \cdot 2015 + 1)^2$

---

mod II: $N = 4 \cdot 2015 \cdot 2016 + 1$

not $2015 = k \Rightarrow N = 4k(k+1) + 1 =$

$= 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow N = (2 \cdot 2015 + 1)^2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = 4xy - 4x - 4y + 5$, știm că

$x \circ y = 4(x-1)(y-1)+1$, găsiți $a, b \in \mathbb{N}$

dacă $a \circ b = 13$

$E_1)$ $a \circ b = 13 \Leftrightarrow 4(a-1)(b-1)+1 = 13$

$\Leftrightarrow 4(a-1)(b-1) = 12 \mid :4$

$(a-1)(b-1) = 3 \Rightarrow$ cazurile

$E_2)$ $a-1 = -3 \Rightarrow a = -2 \notin \mathbb{N}$ K.O.

$b-1 = -1 \Rightarrow b = 0 \in \mathbb{N}$

Caz II: $a-1 = -1 \Rightarrow a = 0 \in \mathbb{N}$ K.O.

$b-1 = -3 \Rightarrow b = -2 \notin \mathbb{N}$

Caz III: $a-1 = 1 \Rightarrow a = 2 \in \mathbb{N}$

$b-1 = 3 \Rightarrow b = 4 \in \mathbb{N}$

Caz IV: $a-1 = 3 \Rightarrow a = 4 \in \mathbb{N}$

$b-1 = 1 \Rightarrow b = 2 \in \mathbb{N}$

$E_3)$ $(a, b) \in \{(2;4); (4;2)\}$

Prof. Ovidiu Badescu

VS XII
III 1 a)

Fie $f(x) = x^2 \cdot \ln x$, arătați că

$$f'(x) = x(2\ln x + 1)$$

$E_1)$ $f'(x) = (x^2 \cdot \ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} =$

$= 2x \cdot \ln x + x = x(2\ln x + 1)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = x^2 \cdot \ln x$, se știe că

$f'(x) = x(2\ln x + 1)$, se cere ec. tg la G_f în $x = 1$

E_1) ec. tg în $x = \alpha$ este $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$

$\Rightarrow$ ec. tg în $x = 1$ este $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

E_2) $f(1) = 1^2 \ln 1 = 1 \cdot 0 = 0$.

$f'(1) = 1(2\ln 1 + 1) = 1(0 + 1) = 1$

$\Rightarrow$ ec. tg.: $y - 0 = 1(x - 1)$

$y = x - 1$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\cdot\ln x$

a) Să se arate că $f'(x)=x(2\ln x+1)$

b) Să se arate că $1+2ef(x)\geq 0$, $\forall x\in(0;\infty)$

$E_1)$ $f'(x)=0 \Rightarrow$ $x=0\notin D_f$ sau $\ln x=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

$E_2)$

x	0		$e^{-\frac{1}{2}}$		
f'	$\nexists$	$-$ $-$ $-$ $-$	0	$+$ $+$	$+$ $+$
f	$\nexists$	$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	$\nearrow$

$f'\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\left(2\ln\frac{1}{e}+1\right)=\frac{1}{e}(-2+1)=-\frac{1}{e}<0$

$\Rightarrow f'(x)<0$ $\forall x\in(0;e^{-\frac{1}{2}})\Rightarrow f$ $\searrow$ $\forall x\in(0;e^{-\frac{1}{2}})$

$f'(1)=1(2\ln 1+1)=1>0$

$\Rightarrow f'(x)>0$ $\forall x\in(e^{-\frac{1}{2}};\infty)\Rightarrow f$ $\nearrow$ $\forall x\in(e^{-\frac{1}{2}};\infty)$

$$f(e^{-\frac{1}{2}})=(e^{-\frac{1}{2}})^2\ln e^{-\frac{1}{2}}=e^{-1}\cdot(-\frac{1}{2})\Rightarrow$$

$$f(e^{-\frac{1}{2}})=-\frac{1}{2e}$$

$E_3)$ din tabelul de variație $\Rightarrow$

$f(x)\geq-\frac{1}{2e}\ |\cdot 2e>0\Rightarrow 2ef(x)\geq -1\Rightarrow \boxed{1+2ef(x)\geq 0}$

Prof. Ovidiu Badescu

VS VII

III 20)

Fie $f(x)=(x-1)e^x$, arătați că

$$\int_0^1 f(x)e^{-x}dx=-\frac{1}{2}$$

E.1 $I=\int_0^1 (x-1)e^x e^{-x}dx=\int_0^1 (x-1)e^x\cdot\frac{1}{e^x}dx=$

$=\int_0^1 (x-1)dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-x\Big|_0^1=\left(\frac{1}{2}-0\right)-(1-0)=$

$=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

VS XII

Fie $f(x)=(x-1)e^x$, găsiți $a \in \mathbb{R}$ I. 26)

dacă $F(x)=(x+a)e^x$ este o primitivă pentru funcția f

$E_1)$ F primitivă $f \Leftrightarrow \begin{cases} F \text{ derivabilă evident} \\ F'(x)=f(x) \end{cases}$

$E_2)$ $F'(x)=\left((x+a)e^x\right)'=1e^x+(x+a)e^x=$

$=e^x(1+x+a)=(x+a+1)e^x$

$E_3)$ $F'(x)=f(x) \Rightarrow x+a+1=x-1$

$\Leftrightarrow a+1=-1 \Rightarrow \boxed{a=-2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=(x-1)e^x$, arătați că

$$\int_0^1 x^3 f(x)\,dx \leq -\frac{1}{20}$$

E1) $I=\int_0^1 x^3(x-1)e^x\,dx$

E2) Nu a compara o integrală cu un număr, compar funcția din interior, apoi integrez

$x\in[0;1] \Rightarrow 0\leq x\leq 1 \Rightarrow 1\leq e^x\leq e$

$x\in[0;1] \Rightarrow x-1\leq 0 \Rightarrow x^3(x-1)\leq 0$

Așadar $1\leq e^x\leq e \;/\cdot\, x^3(x-1)\leq 0$

$$e\cdot x^3(x-1)\leq e^x\cdot x^3(x-1)\leq x^3(x-1)$$

E3) $e^x\cdot x^3(x-1)\leq x^3(x-1) \;/\int_0^1 -- dx$

$$\Rightarrow I\leq \int_0^1 (x^4-x^3)\,dx$$

$$I\leq \frac{x^5}{5}\Big|_0^1-\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 \Rightarrow I\leq\left(\frac{1}{5}-0\right)-\left(\frac{1}{4}-0\right)$$

$$I\leq \frac{1}{5}-\frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{I\leq -\frac{1}{20}}$$

Prof. Ovidiu Bădescu