Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 10

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1=2+3i$ și $z_2=1+2i$. Arătați că $2z_1-3z_2=1$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-3mx+2=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $x_1+x_2+x_1x_2+1=0$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x+3)+\log_4(x-3)=2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 6.

5p **5.** Determinați numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+2\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}-3\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6.** Arătați că $(\sin x-\cos x)^2+\sin 2x=1$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-1$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $\det(A(x))\cdot\det(A(x+1))=12$.

5p **c)** Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2)\cdot X=A(0)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-(m+2)X^2+(m^2+2)X-1$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=-1$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Demonstrați că $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_1)^2=-4(m-1)^2$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care toate rădăcinile polinomului f sunt numere reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2e^x-x^2-2x-2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2(e^x-x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)^n$, unde n este număr natural nenul.

5p **a)** Arătați că $\int_{-2}^{1}(x+2)^2\,dx=9$.

5p **b)** Pentru $n=1$, arătați că $\int_0^1 f(x)e^x\,dx=2e-1$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$ are aria egală cu $\frac{242}{n+1}$.

M1/2017/V10
5/1

Fie $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1+2i$

Se cere: $2z_1 - 3z_2 = 1$

E1) $2z_1 - 3z_2 = 2(2+3i) - 3(1+2i) =$

$= 4+6i-3-6i = 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

XII/2017/N10

Dacă x_1, x_2 rād pt $x^2-3mx+2=0$, scrie $\frac{I}{2}$

$m=?$ dacă $x_1+x_1x_2+x_2+1=0$

$E_1)$ $\begin{cases} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \Rightarrow x_1+x_2=3m \Rightarrow S=3m \\ x_1x_2=\frac{c}{a} \Rightarrow x_1\cdot x_2=2 \Rightarrow P=2 \end{cases}$

$E_2)$ relația devine: $\underline{x_1+x_1x_2+x_2}+1=0 \Rightarrow S+P+1=0$

$\Leftrightarrow 3m+2+1=0 \Rightarrow 3m=-3 \Rightarrow m=-1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\log_4(x+3)+\log_4(x-3)=2$$

E_1) Ec. devine: $\log_4(x+3)(x-3)=2$

$\Leftrightarrow (x+3)(x-3)=4^2 \Leftrightarrow$

$x^2-9=16 \Leftrightarrow x^2=25$

$\Leftrightarrow x=\pm 5$ soluții posibile

E_2) le verific în ecuație:

$x_1=5 \Rightarrow \log_4(5+3)+\log_4(5-3)=2 \Leftrightarrow \log_4 8+\log_4 2=2$

$\Leftrightarrow \log_4 16=2 \Leftrightarrow 16=4^2$ adev

$\Rightarrow x_1=5$ soluție

$x_2=-5 \Rightarrow \log_4(-5+3)+\log_4(-5-3)=2 \Leftrightarrow \log_4(-2)+\log_4(-8)=2$

contradicție pt că $\nexists \log_4(-2)$ nici $\log_4(-8)$

$\Rightarrow x_2=-5$ nu e soluție

$S_f: x=5$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2019/VII.0
I/4

Găsiți probabilitatea ca alegând un număr din mț. numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 6

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile: toate nr. naturale de două cifre

$\overline{ab}$ cu $\begin{matrix} a \to 9\text{v} \\ b \to 10\text{v} \\ \text{indep} \end{matrix}$ $\Big\} \to 90$ numere

$E_3)$ nr. caz favorabile: toate nr. $\overline{ab}$ cu $a \cdot b = 6$

$\to \begin{cases} a=1 \\ b=6 \end{cases} \Big\} \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \Big\} \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases} \Big\} \begin{cases} a=6 \\ b=1 \end{cases}$

$\to \overline{ab} \in \{16; 23; 32; 61\} \to 4$ numere

$E_4)$ $P = \dfrac{4}{90} = \dfrac{2}{45}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți $a \in \mathbb{R}$ dacă vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 2\vec{j}$ și $\vec{v} = 3\vec{i} - 3\vec{j}$ sunt coliniari

---

E_1) $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v}$

E_2) $\frac{a}{3} = \frac{2}{-3} \Leftrightarrow -3a = 6 \Leftrightarrow \boxed{a = -2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Arătați că:

$$(\sin x - \cos x)^2 + \sin 2x = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

E1) $(\sin x - \cos x)^2 + \sin 2x =$

$= \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin 2x =$

$= 1 - 2\sin x \cos x + \sin 2x$

E2) Dar, $\sin 2x = 2\sin x \cos x \Rightarrow$

$\Rightarrow (\sin x - \cos x)^2 + \sin 2x = 1 - 2\sin x \cos x + 2\sin x \cos x =$

$= 1$

Prof. Ovidiu Băescu

M1/2012/V10

Ex. 1 a)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$. Arătați că

$\det(A(0))=-1$

E1) $\det(A(0))=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0+1+0-1-0-1=$

$=-1$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V10
II 16)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$

Găsiți $x \in \mathbb{R}$ dacă $\det(A(x)) \cdot \det(A(x+1)) = 12$

$E_1)$ $\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix} = x+1+x(x+1)-1-x^2-(x+1) =$

$= x+1+x^2+x+1-x^2-x-1 =$

$= x-1$

$E_2)$ $\det(A(x+1)) = \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 1 \\ x+2 & 1 & 1 \\ 1 & x+1 & 1 \end{vmatrix} = x+1+1+(x+1)(x+2)-1-(x+1)^2-(x+2)$

$= x+1+1+x^2+3x+2-1-x^2-2x-1-x-2 =$

$= x$

$E_3)$ $\det(A(x))\det(A(x+1)) = 12 \Leftrightarrow$

$(x-1)x = 12 \Leftrightarrow x^2-x-12=0$

$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 7}{2} \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow -3 \end{matrix}$

$S_f : x \in \{-3; 4\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix}$ M1/2019/(11) II e)

Găsiți $X \in M_3(\mathbb{R})$ dacă $A(2)\cdot X = A(0)$

$E_1)$ $A(2)\cdot X = A(0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2)$ Studiem dacă $M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ e inversabilă

$\det M = 2+6+1-1-4-3 = 9-8 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1}$

$M^* = ?$, $^tM = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$m^*_{11} = (-1)^{1+1}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1$

$m^*_{12} = (-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$m^*_{13} = (-1)^{1+3}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$m^*_{21} = (-1)^{2+1}\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$

$m^*_{22} = (-1)^{2+2}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$m^*_{23} = (-1)^{2+3}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$m^*_{31} = (-1)^{3+1}\cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$

$m^*_{32} = (-1)^{3+2}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3$

$m^*_{33} = (-1)^{3+3}\cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$\Rightarrow M^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{\det M}\cdot M^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

$E_3)$ ec. este $MX = N \mid \cdot M^{-1} \Rightarrow X = M^{-1}\cdot N$

$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Prof. Ovidiu Bagesu

Fie $f = X^3 - (m+2)X^2 + (m^2+2)X - 1$

Arătați că $f(0) = -1$, $\forall m \in \mathbb{R}$

E1) $f(0) = 0^3 - (m+2)\cdot 0^2 + (m^2+2)\cdot 0 - 1$

$f(0) = 0 - 0 + 0 - 1 \Rightarrow f(0) = -1$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V10

Fie $f = X^3 - (m+2)X^2 + (m^2+2)X - 1$ (V 2 b)

Arătați că $(x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + (x_3-x_1)^2 = -4(m-1)^2$

$E_1)$ $N = (x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + (x_3-x_1)^2$

$N = (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) + (x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2) + (x_3^2 - 2x_3x_1 + x_1^2)$

$N = 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1)$

$E_2)$ $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2$

$x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = S_2$

$E_3)$ Din VIETE,

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = m+2 \\ S_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = \frac{c}{a} = m^2+2 \\ S_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{c}{a} = 1 \end{cases}$$

$E_3)$ $N = 2(S_1^2 - 2S_2 - S_2)$

$N = 2(S_1^2 - 3S_2) = 2((m+2)^2 - 3(m^2+2))$

$= 2(m^2 + 4m + 4 - 3m^2 - 6) =$

$= 2(-2m^2 + 4m - 2) = -4(m^2 - 2m + 1)$

$\Rightarrow N = -4(m-1)^2$

Prof. Ovidiu Bădescu

XII/2017/V10
II 2 c)

Fie $f = X^3 - (m+2)X^2 + (m^2+2)X - 1$

Se știe că $(x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + (x_3-x_1)^2 = -4(m-1)^2$,

se cere $m = ?$, $m \in \mathbb{R}$ dacă toate rădăc lui f sunt reale

$\in_1$) toate rad. lui f sunt reale $\Rightarrow (x_1-x_2)^2 \geq 0$,

$(x_2-x_3)^2 \geq 0$, $(x_3-x_1)^2 \geq 0$ și adunând

$\Rightarrow (x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + (x_3-x_1)^2 \geq 0 \xrightarrow{\text{și}}$

$-4(m-1)^2 \geq 0 \mid :(-4)$

$(m-1)^2 \leq 0$

și cum $m \in \mathbb{R} \Rightarrow (m-1)^2 \geq 0$ $\Big\} \Rightarrow m-1=0$

$\Rightarrow \boxed{m=1}$

Prof. Ovidiu Badescu

XII/2017/V10

II 1 a)

Fie $f(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2$

Se cere: $f'(x) = 2(e^x - x - 1)$

E1) $f'(x) = (2e^x - x^2 - 2x - 2)' =$

$= 2e^x - 2x - 2 = 2(e^x - x - 1)$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2013/V/10
(D' 16)

Fie $f(x) = 2e^x - x^2 - 2x - 2$, $x \in \mathbb{R}$

ec. tg la Gf în $x = 0$

E_1) ec. tg în $x = \alpha$ este

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$$

E_2) în $x = 0 \Rightarrow y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$f(0) = 2e^0 - 0 - 0 - 2 = 2 - 2 = 0$

$f'(0) = ?$, calc. $f'(x) = 2e^x - 2x - 2$

$\Rightarrow f'(0) = 2 \cdot e^0 - 0 - 2 = 2 - 2 = 0$

E_3) ec. tg: $y - 0 = 0(x - 0) \Rightarrow y = 0$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2017/V10
III 1c)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2e^x-x^2-2x-2$

Arătați că f crescătoare pe $\mathbb{R}$

E_1) arăt. că $f'(x)\geq 0$ și că $f'(x)=0$ doar în $x=0$

E_2) $f'(x)=(2e^x-x^2-2x-2)'=2e^x-2x-2=$

$=2(e^x-x-1)$

E_3) Arătăm că $e^x-x-1\geq 0$, fie

$g(x)=e^x-x-1$, $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$g'(x)=e^x-1$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0$

x		0	
g'	$-\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +\ +$
g	$\searrow$	0	$\nearrow$

$g'(-1)=e^{-1}-1=\frac{1}{e}-1<0 \Rightarrow g'(x)<0, \forall x\in(-\infty,0)\Rightarrow g_\searrow$

$g'(1)=e-1=2,7-1>0 \Rightarrow g'(x)>0, \forall x\in(0,\infty)\Rightarrow g_\nearrow$

$g(0)=e^0-0-1=0$

Din tabel $\Rightarrow g(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ și $g(x)=0$ doar în $x=0$

$\Rightarrow f'(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ și $f'(x)=0$ doar în $x=0$

$\Rightarrow f_\nearrow$ pe $\mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2017/V10

Fie $f(x)=(x+2)^n$, arătați că $\int_{-2}^{1}(x+2)^2\,dx=9$

$E_1)\ I=\int_{-2}^{1}(x^2+4x+4)\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1}+4\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{1}+4x\Big|_{-2}^{1}=$

$=\frac{1}{3}\left(1-(-2)^3\right)+2\left(1^2-(-2)^2\right)+4\left(1-(-2)\right)=$

$=\frac{1}{3}(1+8)+2(1-4)+4\cdot 3=\frac{9}{3}-6+12=3-6+12=$

$=9$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/var
III 2 b)

Fie $f(x)=(x+2)^n$, pt $n=1$
arătați că $\int_0^1 f(x)\cdot e^x dx = 2e-1$

E_1) $I=\int_0^1 (x+2)e^x dx$

$f=x+2 \Rightarrow f'=1$

$g'=e^x \Rightarrow g=e^x$

$I=(x+2)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx$

$I=(3e-2e^0)-e^x\Big|_0^1$

$I=(3e-2)-(e^1-e^0)=3e-2-e+1$

$=2e-1$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2017/var3
II 2c)

Fie $f(x)=(x+2)^n$, să se afle $n=?$, $n\in\mathbb{N}^*$ știind că aria dintre G_f, Ox și dreptele $x=-1$ și $x=1$ este $\frac{242}{n+1}$

$E_1)$ $\mathcal{A}=\int_{-1}^{1}|f(x)|dx=\int_{-1}^{1}|(x+2)^n|dx$

$x\in[-1;1]\Rightarrow x+2\in[1;3]\Rightarrow x+2>0$

$\Rightarrow \mathcal{A}=\int_{-1}^{1}(x+2)^n dx=\frac{(x+2)^{n+1}}{n+1}\Big|_{-1}^{1}=$

$=\frac{1}{n+1}\left(3^{n+1}-1^{n+1}\right)=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$

$E_2)$ $\mathcal{A}=\frac{242}{n+1}\Rightarrow\frac{3^{n+1}-1}{n+1}=\frac{242}{n+1}$

$\Rightarrow 3^{n+1}-1=242\Rightarrow 3^{n+1}=243$

243	3
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

$\Rightarrow 243=3^5$

$\Rightarrow 3^{n+1}=3^5$

$f(x)=3^x$ inj $\Rightarrow n+1=5\Rightarrow \boxed{n=4}$

Prof. Ovidiu Badescu