Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
VARĂ REZERVĂ
Matematică *M_mate-info*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1=5+2i$ și $z_2=3-3i$. Arătați că $3z_1+2z_2=21$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-x+2$. Determinați abscisa punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2+3}=3\cdot 3^{3x}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 3 și cu 5.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,2)$, $B(2,4)$ și $C(m,0)$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că punctele A, B și C sunt coliniare.

5p **6.** Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC, știind că $AB=4$, $AC=8$ și $A=\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} 2-x & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(1-x) & 0 & 2x-1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=2$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(x)A(-x))\le 0$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Arătați că, dacă numerele naturale m și n verifică relația $A(m)A(n)=A(2)$, atunci $m+n=3$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+2X^2+aX+1$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real a, știind că $f(1)=0$.

5p **b)** Pentru $a=2$, calculați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+X+1.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care rădăcinile polinomului f au modulele egale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-1-\ln(x+2)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x-\frac{1}{x+2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(-2,+\infty)$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_1^e x\ln^n x\,dx$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^e x\,dx=\frac{e^2-1}{2}$.

5p **b)** Demonstrați că $I_{n+1}\le I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2$, pentru orice număr natural nenul n.

M9/2017/VS
I 4

Fie $z_1 = 5+2i$, $z_2 = 3-3i$.

Arătați că: $3z_1 + 2z_2 = 21$

$E_1)$ $3z_1 + 2z_2 = 3(5+2i) + 2(3-3i) =$

$= 15 + 6i + 6 - 6i = 21$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V9

I/2

Fie $f(x)=x+1$, $g(x)=x^2-x+2$

Găsiți pct de $\cap$ dintre cele două grafice

E1) Rezolv sistemul $\begin{cases} f(x)=x+1 \\ g(x)=x^2-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+1 \\ y=x^2-x+2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x^2-x+2=x+1 \Leftrightarrow x^2-2x+1=0$

$\Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2\cdot 1}=\frac{2}{2}=1$

E2) $x=1 \Rightarrow y=x+1 \Rightarrow y=2$

$\Rightarrow M(1;2)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$: $3^{x^2+3} = 3 \cdot 3^{3x}$

M11/2021/V9
I/5

E_1) ec. devine: $3^{x^2+3} = 3^{1+3x}$ $\Big\}$ $\Rightarrow$

E_2) deoarece $f(x) = 3^x$ e injectivă $\Big\}$

$\Rightarrow x^2+3 = 1+3x \rightarrow x^2-3x+2=0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \dfrac{3 \pm 1}{2} \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{matrix}$

$S_f: x \in \{1, 2\}$

Prof. Ovidiu Badescu

M11/2017/V9
1/4

Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mț. nr. naturale de două cifre, acesta să fie divizibil cu 3 și cu 5

E1) $P = \frac{\text{nr. cz favorabile}}{\text{nr. cz posibile}}$

E2) nr. cz posibile: toate nr. naturale de 2 cifre

$\overline{ab}$ cu $a \to 9$ v
$b \to 10$ v
ind
$\Rightarrow$ 90 numere

E3) nr. cz favorabile: câte nr. $\overline{ab}$: 3 și cu 5

$\Rightarrow \overline{ab} : 15 \Rightarrow ab \in \{15; 30; 45; 60; 75; 90\}$

$\Rightarrow$ 6 numere

E4) $P = \frac{6}{90} = \frac{1}{15}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M11/2017/V9
I/5

Fie $A(0;2)$, $B(2;4)$, $C(m,0)$

Se cere $m=?$ dacă A, B, C coliniare

$E_1)$ A, B, C coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$

$E_2)$ $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 0+2m+0-4m-4-0=0$

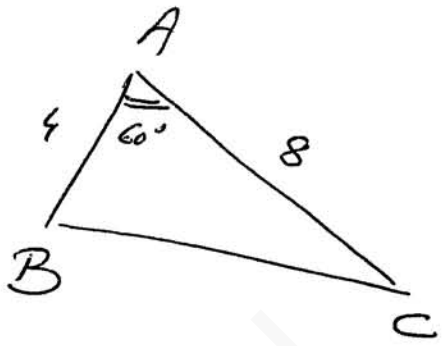
$\Leftrightarrow -2m-4=0 \Leftrightarrow 2m=-4$

$\Leftrightarrow m=-2$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2017/V3
I/6

Calculați lungimea lui BC în ΔABC dacă $AB=4$, $AC=8$, $A=\frac{\pi}{3}$



$E_1)$ Din T. cos $\Rightarrow$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$

$E_2)$ $BC^2 = 16 + 64 - 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ$

$BC^2 = 80 - 64 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow BC^2 = 80 - 32$

$BC^2 = 48 \Leftrightarrow \boxed{BC = 4\sqrt{3}}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V3
II 1a)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 2-x & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(1-x) & 0 & 2x-1 \end{pmatrix}$

Se cere: $\det(A(2))=2$

E1) $A(2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

E2) $\det(A(2))=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0+0+0+2-0-0$

$=2$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2019/V9

II 16)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 2-x & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(1-x) & 0 & 2x-1 \end{pmatrix}$

Arătați că $\det(A(x)\cdot A(-x)) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

E_1) Folosim $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

E_2) $\det(A(x)\cdot A(-x)) = \det(A(x)) \cdot \det(A(-x))$

E_3) $\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(1-x) & 0 & 2x-1 \end{vmatrix} =$

$= (2-x)(2x-1) - 0 - 0 - 2(1-x)(x-1) =$

$= 4x - 2 - 2x^2 + x - 2(x - 1 - x^2 + x)$

$= -2x^2 + 5x - 2 - 2(-x^2 + 2x - 1)$

$= -2x^2 + 5x - 2 + 2x^2 - 4x + 2 = x$

E_4) din $\det(A(x)) = x \Rightarrow \det(A(-x)) = -x$

E_5) $\det(A(x)) \cdot \det(A(-x)) = x \cdot (-x) = -x^2 \leq 0$

$\Rightarrow \det(A(x)\cdot A(-x)) \leq 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V9
II 1c)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 2-x & 0 & x-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(1-x) & 0 & 2x-1 \end{pmatrix}$

Dacă $m,n\in\mathbb{N}$ cu $A(m)A(n)=A(2)$, arătați că

$$m+n=3$$

$E_1)$ $A(m)\cdot A(n)=\begin{pmatrix} 2-m & 0 & m-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(1-m) & 0 & 2m-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-n & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(1-n) & 0 & 2n-1 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} (2-m)(2-n)+(m-1)2(1-n) & 0 & (2-m)(n-1)+(m-1)(2n-1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(1-m)(2-n)+(2m-1)2(1-n) & 0 & 2(1-m)(n-1)+(2m-1)(2n-1) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 4-2n-2m+mn+2(m-mn-1+n) & 0 & 2n-2-mn+m+2mn-m-2n+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(2-n-2m+mn)+2(2m-2mn-1+n) & 0 & 2(n-1-mn+m)+4mn-2m-2n+1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -mn+2 & 0 & mn-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2mn+2 & 0 & 2mn-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-mn & 0 & mn-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(1-mn) & 0 & 2mn-1 \end{pmatrix}(1)$$

$E_2)$ $A(2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ și egalând cu (1)

$$\Rightarrow\begin{cases} 2-mn=0 \Rightarrow mn=2 \\ mn-1=1 \Rightarrow mn=2 \\ 2(1-mn)=-2 \Rightarrow mn=2 \\ 2mn-1=3 \Rightarrow mn=2 \end{cases}$$

$E_3)$ $m\cdot n=2$ și $m,n\in\mathbb{N}\Rightarrow\begin{cases} m=1 \\ n=2 \end{cases}$ sau $\begin{cases} m=2 \\ n=1 \end{cases}$ și

în orice caz, $m+n=3$

Prof. Ovidiu Badescu

XII/2017/v9
II 2 a)

Fie $f = X^3 + 2X^2 + aX + 1$

Se cere $a = ?$ dacă $f(1) = 0$

E) $f(1) = 0 \Rightarrow 1 + 2 + a + 1 = 0 \Rightarrow a = -4$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V9
II 2b)

Fie $f = X^3 + 2X^2 + aX + 1$

Pentru $a = 2$, calculați câtul și restul lui $f : (X^2 + X + 1)$

$E_1)$ $a = 2 \Rightarrow f = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$

$E_2)$ $X^3 + 2X^2 + 2X + 1 \;\big|\; X^2 + X + 1$

$-X^3 - X^2 - X$ $\qquad\qquad$ $X + 1$

$X^2 + X + 1$

$-X^2 - X - 1$

0

$\Rightarrow$ câtul $C(X) = X + 1$

restul $R(X) = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Mi/2021/VS
II 20)

Fie $f = X^3 + 2X^2 + aX + 1$, găsiți $a \in \mathbb{R}$ dacă rădăcinile lui f au modulele egale

---

E_1) $|x_1| = |x_2| = |x_3|$

Dar, din VIÈTE, $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a \\ x_1x_2x_3 = -1 \end{cases}$

E_2) din $x_1x_2x_3 = -1 \Rightarrow |x_1x_2x_3| = |-1| \Rightarrow |x_1||x_2||x_3| = 1$

și cum $|x_1| = |x_2| = |x_3| \Rightarrow |x_1|^3 = 1 \Rightarrow |x_1| = 1$

$\Rightarrow |x_2| = 1 \Rightarrow |x_3| = 1$

E_3) TEORIE: dacă o ec. de grad impar are toți coeficienții reali $\Rightarrow$ ec are cel puțin o rad reală

E_4) Fie $x_1 \in \mathbb{R}$ și cum $|x_1| = 1 \Rightarrow x_1 = \pm 1$

$f(1) = 0 \Rightarrow 1 + 2 + a + 1 = 0 \Rightarrow a = -4$ valoare posibilă

$f(-1) = 0 \Rightarrow -1 + 2 - a + 1 = 0 \Rightarrow a = 2$ valoare posibilă

E_5) Trebuie să verificăm dacă pentru aceste valori avem $|x_2| = |x_3| = 1$

$a = -4 \Rightarrow f = X^3 + 2X^2 - 4X + 1$ cu răd. $x = 1$

	x^3	x^2	x	x^0
	1	2	−4	1
1	1	3	−1	0

$\Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+3x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ \text{sau} \\ x_{2,3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2} \end{cases}$

și e fals că $|x_2| = |x_3| = 1$

$a = 2 \Rightarrow f = X^3 + 2X^2 + 2X + 1$ cu $x = -1$,

	x^3	x^2	x	x^0
	1	2	2	1
−1	1	1	1	0

$\Rightarrow (x+1)(x^2+x+1) = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ cu $|x_2| = |x_3| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$

$\Rightarrow \boxed{a = 2}$ e ok.

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V9
II 1a)

Fie $f(x) = e^x - 1 - \ln(x+2)$, arătați că $f'(x) = e^x - \frac{1}{x+2}$

---

f_1) $f'(x) = \left(e^x - 1 - \ln(x+2)\right)' = e^x - 0 - \frac{1}{x+2} \cdot 1 =$

$= e^x - \frac{1}{x+2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V9
III 161

Fie $f(x) = e^x - 1 - \ln(x+2)$, arătați că f convexă pe $(-2;\infty)$

E1) Vom arăta că $f''(x) \geq 0, \forall x \in (-2;\infty)$

E2) $f'(x) = (e^x - 1 - \ln(x+2))' = e^x - 0 - \frac{1}{x+2} \cdot 1 =$

$= e^x - \frac{1}{x+2}$

E3) $f''(x) = \left(e^x - \frac{1}{x+2}\right)' = e^x - \frac{1'(x+2) - 1 \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} =$

$= e^x - \frac{0 - 1}{(x+2)^2} = e^x + \frac{1}{(x+2)^2}$

E4) $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow e^x > 0$

$\frac{1}{(x+2)^2} > 0$

$\Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow f''(x) \geq 0, \forall x \in (-2;\infty)$

$\Rightarrow f$ convexă pe $(-2;\infty)$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2017/V9

Fie $f(x) = e^x - 1 - \ln(x+2)$, sa se re $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ — II 1c)

$E_1)$ $\ell = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 1 - \ln(x+2)}{x} \overset{\frac{\infty-1-\infty}{\infty}}{=\!=\!=} \lim_{x\to\infty} \left(\frac{e^x - 1}{x} - \frac{\ln(x+2)}{x} \right)$

$E_2)$ $\ell_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 1}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}\ l'H}{=\!=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \infty$

$\ell_2 = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x+2)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}\ l'H}{=\!=\!=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+2} \cdot 1}{1} \overset{\frac{1}{\infty}}{=\!=\!=} 0$

$E_3)$ $\ell = \infty - 0 = \infty$

Prof. Ovidiu Bădescu

M11/2017/V9

III 2a)

Fie $I_n = \int_1^e x \cdot \ln^n x \, dx$

Arătați că $\int_1^e x \, dx = \frac{e^2-1}{2}$

$\in, 1 \quad I = \int_1^e x \, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2-1}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V9
II 2 b)

Fie $I_n = \int_1^e x \cdot \ln^n x \, dx$, să se arate

$$I_{n+1} \leq I_n, \ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

E1) $I_{n+1} - I_n = \int_1^e x \cdot \ln^{n+1} x \, dx - \int_1^e x \ln^n x \, dx =$

$$= \int_1^e x \ln^n x (\ln x - 1) \, dx$$

E2) $x \in [1; e] \rightarrow 1 \leq x \leq e \mid \ln(\cdot\cdot)$

$$\rightarrow 0 \leq \ln x \leq 1 \mid -1$$

$$-1 \leq \ln x - 1 \leq 0 \rightarrow \boxed{\ln x - 1 \leq 0} \ (1)$$

E3) $x \in [1; e] \rightarrow \boxed{x \geq 0} \ (2)$

$x \in [1; e] \rightarrow 1 \leq x \leq e \mid \ln(\cdot\cdot)$

$$0 \leq \ln x \leq 1 \mid (\cdot)^n$$

$$0 \leq \ln^n x \leq 1 \rightarrow \boxed{\ln^n x \geq 0} \ (3)$$

E4) Dacă (1) + (2) + (3) $\rightarrow x \cdot \ln^n x (\ln x - 1) \leq 0 \mid \int_1^e \cdots dx$

$$\rightarrow \int_1^e x \cdot \ln^n x (\ln x - 1) \, dx \leq 0 \rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0$$

$$\rightarrow I_{n+1} \leq I_n$$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V 9

III c c)

Fie $I_n = \int_1^e x \cdot \ln^n x \, dx$

Sa se arate $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$

E1) $I_{n+1} = \int_1^e x \cdot \ln^{n+1} x \, dx$

$f = \ln^{n+1} x \Rightarrow f' = (n+1)\ln^n x \cdot \frac{1}{x}$

$g' = x \Rightarrow g = \int x \, dx = \frac{x^2}{2}$

E2) $I_{n+1} = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^{n+1} x \Big|_1^e - \frac{n+1}{2} \int_1^e \ln^n x \cdot \frac{1}{x} \cdot x^2 \, dx$

$I_{n+1} = \frac{1}{2}(e^2 \ln^{n+1} e - 1 \ln^{n+1} 1) - \frac{n+1}{2} \int_1^e \ln^n x \cdot x \, dx$

Cum $\ln e = 1$ și $\ln 1 = 0$

$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{1}{2}(e^2 - 0) - \frac{n+1}{2} I_n \quad | \cdot 2$

$\Rightarrow 2I_{n+1} = e^2 - (n+1)I_n$

$\Rightarrow 2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$

Prof. Ovidiu Badescu