Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(5-4i)^2+(5+4i)^2=18$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+8$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2-x-2}=x-2$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă produsul cifrelor egal cu 9.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(2,3)$. Determinați coordonatele punctului M, știind că punctul B este mijlocul segmentului AM.

5p **6.** Calculați aria paralelogramului $ABCD$, știind că $AB=6$, $BC=3$ și $m(\sphericalangle ABC)=30^\circ$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}0&0&x\\x&0&0\\0&x&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)A(z)=xyzI_3$, pentru orice numere reale x, y și z.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr natural nenul n, numărul $\det(A(n)A(n)+A(n)+I_3)$ este pătratul unui număr natural.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+aX^2+4$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real a, știind că $f(2)=0$.

5p **b)** Pentru $a=-5$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+X-2.

5p **c)** Determinați rădăcinile polinomului f, știind că $f(i)=0$, unde $i^2=-1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f, în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{1}{e^x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(e^x+1\right)f(x)\,dx=e-1$.

5p **b)** Arătați că $\int_{-1}^{1}x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=0$.

5p **c)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$ are aria mai mică decât $\ln 2$.

Profu' Virgil Bădescu

Arătați că $(5-4i)^2+(5+4i)^2=18$

$E_1)$ $(5-4i)^2+(5+4i)^2=(25-40i+16i^2)+(25+40i+16i^2)=$

$=(25-16)+(25-16)=9+9=18$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=x^2-6x+8$, găsiți abscisele punctelor de intersecție ale G_f cu axa Ox

---

E1) $\cap Ox$: $y=0 \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow x^2-6x+8=0$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm 2}{2}\begin{matrix}\nearrow 4\\ \searrow 2\end{matrix}$$

$$\Rightarrow x\in\{2;4\}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

XII/2019/V7
I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x^2-x-2}=x-2$$

E_1) $\sqrt{x^2-x-2}=x-2 \mid ()^2$

$x^2-x-2=(x-2)^2 \Leftrightarrow x^2-x-2=x^2-4x+4$

$\Leftrightarrow 3x=6 \Leftrightarrow x=2$ soluție posibilă

E_2) se verifică în ecuație

$\Rightarrow \sqrt{4-2-2}=2-2 \Leftrightarrow 0=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2018/var7
I/4

Calculați probabilitatea ca alegând un număr natural de două cifre, acesta să aibă modulul cifrelor egal cu 9

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz. posibile: toate nr. naturale de 2 cifre

$\overline{ab}$ cu $\begin{matrix} a \to 9 \text{ v} \\ b \to 10 \text{ v} \\ \text{evident} \end{matrix}$ $\Big\} \to$ 90 numere

$E_3)$ nr. caz favorabile: toate nr. naturale $\overline{ab}$ cu $a \cdot b = 9$

$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases}$ sau $\begin{matrix} a=3 \\ b=3 \end{matrix}$ sau $\begin{cases} a=9 \\ b=1 \end{cases}$

$\Rightarrow 19; 33; 91 \Rightarrow$ 3 numere

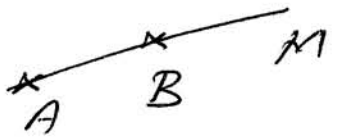
$E_4)$ $P = \dfrac{3}{90} = \dfrac{1}{30}$

Prof. Ovidiu Badescu

M11/2017/V7

I/5

Fie $A(2;1)$, $B(2;3)$, să se scr coord lui M dacă B este mijlocul lui AM



E,) B mijl lui AM

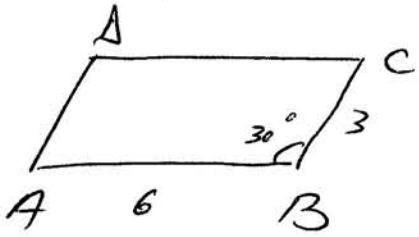
$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_M}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_M}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2 = \frac{2 + x_M}{2} \Rightarrow x_M = 4 - 2 = 2 \\ 3 = \frac{1 + y_M}{2} \Rightarrow y_M = 6 - 1 = 5 \end{cases}$$

$\Rightarrow M(2;5)$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/ V7
I/6

Calculați aria paralelogramului $ABCD$ dacă $AB=6$, $BC=3$ și $m(\widehat{ABC})=30^\circ$



E) $A_{ABCD} = AB \cdot BC \cdot \sin B$

$A_{ABCD} = 6 \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ = 18 \cdot \frac{1}{2} = 9$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1(2017)/v.7

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$, arătați

că $\det(A(1))=1$

E1) $\det(A(1))=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0+0+1-0-0-0=$

$=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V7
II 1 b)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$

Arătați că $A(x)A(y)A(z)=(xyz)I_3$

E1) $A(x)A(y)A(z)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & y \\ y & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 0 & xy & 0 \\ 0 & 0 & xy \\ xy & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} xyz & 0 & 0 \\ 0 & xyz & 0 \\ 0 & 0 & xyz \end{pmatrix}=$

$=(xyz)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=(xyz)I_3$

Prof. Ovidiu Badescu

M11/2017/V 7

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \end{pmatrix}$, arătați că II 1 c)

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, numărul $\det(A(n)A(n)+A(n)+I_3)$ este pătratul unui număr natural

---

$E_1)$ $A(n)A(n)+A(n)+I_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & n \\ n & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & n \\ n & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & n \\ n & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \end{pmatrix}+$

$+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 0 & n^2 & 0 \\ 0 & 0 & n^2 \\ n^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & n \\ n & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 1 & n^2 & n \\ n & 1 & n^2 \\ n^2 & n & 1 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $\det(A(n)A(n)+A(n)+I_3)=\begin{vmatrix} 1 & n^2 & n \\ n & 1 & n^2 \\ n^2 & n & 1 \end{vmatrix}=$

$=1+n^6+n^3-n^3-n^3-n^3=$

$=n^6-2n^3+1=(n^3-1)^2$ care e pătratul unui număr natural

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V7

Fie $f = X^4 + aX^2 + 4$, cu $a \in \mathbb{R}$ II 2a)

dacă $f(2) = 0$

E) $f(2) = 0 \Rightarrow 16 + 4a + 4 = 0 \Rightarrow 4a = -20$

$\Rightarrow a = -5$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V7
II 2 b)

Fie $f = X^4 + aX^2 + 4$, pentru $a = -5$ găsiți câtul și restul împărțirii lui f la $X^2 + X - 2$

E1) $a = -5 \Rightarrow f = X^4 - 5X^2 + 4$

E2) $X^4 - 5X^2 + 4 \;\big|\; X^2 + X - 2$

$-X^4 - X^3 + 2X^2$ $\qquad$ $X^2 - X - 2$

$\backslash \quad -X^3 - 3X^2 + 4$

$X^3 + X^2 - 2X$

$\backslash \quad -2X^2 - 2X + 4$

$2X^2 + 2X - 4$

$\backslash \quad \backslash \quad \backslash$

$\Rightarrow$ câtul este $C(X) = X^2 - X - 2$

restul este $R(X) = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V7

Fie $f = X^4 + aX^2 + 4$ cu $a \in \mathbb{R}$.

Se cer rădăcinile lui f dacă $f(i) = 0$

E_1) $f(i) = 0 \Rightarrow i^4 + ai^2 + 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - a + 4 = 0 \Rightarrow a = 5$

E_2) $a = 5 \Rightarrow f = X^4 + 5X^2 + 4$

E_3) $f \in \mathbb{R}[X]$, $x_1 = i$ rad $\Rightarrow x_2 = \bar{x_1}$ rad

$\Rightarrow x_2 = \bar{i} = -i$ rădăcină

E_4) $x_1 = i$ rad $\Rightarrow f \vdots (x - i)$

$x_2 = -i$ rad $\Rightarrow f \vdots (x + i)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f \vdots (x - i)(x + i)$

$\Rightarrow f \vdots (x^2 - i^2) \Rightarrow f \vdots (x^2 + 1)$

E_5)

$$\begin{array}{r|l} X^4 + 5X^2 + 4 & X^2 + 1 \\ \hline -X^4 - X^2 & X^2 + 4 \\ \hline 4X^2 + 4 & \\ \diagdown & \end{array}$$

$\Rightarrow$ din proba împărțirii $X^4 + 5X^2 + 4 = (X^2 + 1)(X^2 + 4)$

E_6) ec. $x^4 + 5x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x^2 + 4) = 0$

$\Rightarrow$

- $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{0 \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{0 \pm 2i}{2} = \pm i$
- $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x_{3,4} = \frac{0 \pm \sqrt{-16}}{2 \cdot 1} = \frac{0 \pm 4i}{2} = \pm 2i$

$\boxed{S_f : x \in \{\pm i; \pm 2i\}}$

Prof. Ovidiu Băescu

Fie $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$

Arătați că $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

E1) $f'(x) = \left(\ln(\sqrt{x^2+1} + x)\right)' =$

$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \cdot (\sqrt{x^2+1} + x)' =$

$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x + 1\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} \cdot \frac{x + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

Prof. Ovidiu Băescu

Fie $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$, $x \in \mathbb{R}$

ec. tg la G_f în punctul de abscisă $x=0$

știind că $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

E_1) ec. tg în $x=a$ este

$$y - f(a) = f'(a)(x-a)$$

în cazul nostru, ec. tg în $x=0$ este

$$y - f(0) = f'(0)(x-0)$$

E_2) $f(0) = \ln(\sqrt{0+1} + 0) = \ln 1 = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{1} = 1$$

E_3) ec. tg în $x=0$ este

$$y - 0 = 1(x-0) \Leftrightarrow y = x$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$, x

cere $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

E1) $\ell=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=$

$\underset{\ln(\infty-\infty)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}-x}=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\underset{\ln 0_+}{=}\ln\dfrac{1}{\infty+\infty}=-\infty$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = 1 - \frac{1}{e^x+1}$, arătați

că $\int_0^1 (e^x+1) f(x)\,dx = e-1$

E1) $I = \int_0^1 (e^x+1)\cdot\left(1 - \frac{1}{e^x+1}\right) dx =$

$= \int_0^1 (e^x+1)\cdot \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int_0^1 e^x\,dx =$

$= e^x\Big|_0^1 = e^1 - e^0 = e-1$

Prof. Ovidiu Badescu

M1 (2017) V7
III 2 6)

Fie $f(x)=1-\frac{1}{e^x+1}$, arătați că

$$\int_{-1}^{1} x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=0$$

$E_1)$ $f(x)+f(-x)=\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right)+\left(1-\frac{1}{e^{-x}+1}\right)=$

$$=2-\frac{1}{e^x+1}-\frac{1}{\frac{1}{e^x}+1}=2-\frac{1}{e^x+1}-\frac{1}{\frac{1+e^x}{e^x}}=$$

$$=2-\frac{1}{e^x+1}-\frac{e^x}{1+e^x}=2-\frac{e^x+1}{e^x+1}=2-1=1$$

$E_2)$ $I=\int_{-1}^{1} x\left(f(x)+f(-x)\right)dx=$

$$=\int_{-1}^{1} x\cdot 1\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}-\frac{(-1)^2}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2017/V7

Fie $f(x)=1-\frac{1}{e^x+1}$, arătați că III 2 c)
aria dintre G_f, axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=1$ este mai mică decât $\ln 2$

$E_1)$ $\mathcal{A}=\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^1 \left|1-\frac{1}{e^x+1}\right| dx=$

$=\int_0^1 \left|\frac{e^x}{e^x+1}\right| dx$

$E_2)$ $x\in[0;1] \Rightarrow \frac{e^x}{e^x+1}>0 \Rightarrow \mathcal{A}=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$

$E_3)$ dacă suntem deștepți, observăm că

$$\mathcal{A}=\int_0^1 \frac{(e^x+1)'}{e^x+1} dx=\ln|e^x+1|\Big|_0^1=$$

$$=\ln|e+1|-\ln|e^0+1|=\ln\frac{e+1}{2}$$

$E_4)$ rămâne să arătăm că

$$\ln\frac{e+1}{2}<\ln 2 \Leftrightarrow \frac{e+1}{2}<2 \Leftrightarrow e+1<4$$

$$\Leftrightarrow e<3 \text{ adev. } \forall \text{ că } e=2,7\ldots$$

$\Rightarrow$ Aria $<\ln 2$

Obs.: dacă nu eram deștepți, $\mathcal{A}=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} dx$

not $t=e^x+1 \mid (\,)' \Rightarrow dt=e^x dx$

$x=0 \Rightarrow t=2$ și $x=1 \Rightarrow t=e+1$

$\Rightarrow \mathcal{A}=\int_2^{e+1}\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_2^{e+1}=\ln|e+1|-\ln 2=\ln\frac{e+1}{2}$

Prof. Dragu Radescu