Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 4

SUBIECTUL I
(30 de puncte)

5p 1. Calculați suma numerelor întregi din intervalul $(-5, 5)$.

5p 2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-1$. Calculați $(f\circ f)(1)$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+3}=x-3$.

5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1, 2, 3,\ldots, 100\}$, acesta să fie multiplu de 11.

5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,2)$ și $N(4,2)$. Determinați coordonatele punctului P, situat pe axa Ox, astfel încât $PM=PN$.

5p 6. Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC, în care $AB=6\sqrt{2}$ și $C=\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea
(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2^x & 4^x\\ 1 & x & 2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(1))=1$.

5p b) Demonstrați că $\det(A(x))=\left(2^x-1\right)\left(2^x+x-x\cdot 2^x\right)$, pentru orice număr real x.

5p c) Arătați că $A(1)+A(2)+A(3)+\ldots+A(2017)=\begin{pmatrix}2017 & 2017 & 2017\\ 2017 & 2\left(2^{2017}-1\right) & \frac{4}{3}\left(4^{2017}-1\right)\\ 2017 & 2017\cdot 1009 & 2017\cdot 2018\end{pmatrix}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=7xy+7x+7y+6$.

5p a) Arătați că $x*y=7(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.

5p b) Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.

5p c) Demonstrați că, dacă a, b și c sunt numere naturale astfel încât $a*b*c=48$, atunci numerele a, b și c sunt egale.

SUBIECTUL al III-lea
(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$.

5p a) Arătați că $f'(x)=\frac{-x^2+2x+3}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcției f.

5p c) Demonstrați că $-2e\le f(x)\le\frac{6}{e^3}$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$.

5p a) Arătați că $\int_1^2\frac{x+1}{\sqrt{x}}f(x)\,dx=\ln\frac{3}{2}$.

5p b) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p c) Determinați numărul real m, $m>0$, știind că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\sqrt{x}(x+1)f(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ are aria egală cu $1-\ln\frac{m+1}{m}$.

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V4
I/1

Calculați suma numerelor întregi din $(-5;5)$

E_1) m. întregi din $(-5;5)$ sunt

$-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$

E_4) $S = (-4) + (-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4$

$\Rightarrow S = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=x^2-1$, calculați $(f\circ f)(1)$ M1/2017/v4 I/2

$E_1)\ (f\circ f)(1)=f(f(1))=f(1-1)=f(0)=$

$=0-1=-1$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V4
I 3

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x+3} = x-3$$

$E_1)$ $\sqrt{x+3} = x-3 \mid (\,)^2 \Leftrightarrow x+3 = (x-3)^2$

$\Leftrightarrow x+3 = x^2-6x+9 \Leftrightarrow x^2-7x+6=0$

$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 5}{2} \begin{matrix} \nearrow 6 \\ \searrow 1 \end{matrix}$

$\Rightarrow x_1 = 6,\ x_2 = 1$ soluții posibile, le verificăm

$E_2)$ $x_1 = 6 \Rightarrow \sqrt{6+3} = 6-3 \Leftrightarrow \sqrt{9} = 3$ adev $\Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 6$ soluție

$x_2 = 1 \Rightarrow \sqrt{1+3} = 1-3 \Leftrightarrow \sqrt{4} = -2$ fals

$\Rightarrow x_2 = 1$ nu e soluție

$S_f : x \in \{6\}$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2019/V/4
I/4

Calculați probabilitatea ca alegând un nr. din $A=\{1;2;3;-;100\}$, acesta să fie multiplu de 11

$E_1)$ $P=\dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. cazuri posibile: numărul elem. din A adică 100

$E_3)$ nr. cazuri favorabile: numărul multiplilor de 11 din A adică $11, 22, --, 99$

$\Rightarrow$ 9 cazuri favorabile

$E_4)$ $P=\dfrac{9}{100}$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/an12/V4
I/5

Fie $M(2,2)$, $N(4,2)$, x cer coord
lui $P \in Ox$ a.i. $PM = PN$

$E_1)$ $P \in Ox \Rightarrow P(\alpha, 0)$

$E_2)$ $PM = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} = \sqrt{(\alpha-2)^2 + (0-2)^2} =$

$$= \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 8}$$

$$PN = \sqrt{(x_N - x_P)^2 + (y_N - y_P)^2} = \sqrt{(4-\alpha)^2 + (2-0)^2} =$$

$$= \sqrt{16 - 8\alpha + \alpha^2 + 4}$$

$E_3)$ $PM = PN \hookrightarrow \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 8} = \sqrt{\alpha^2 - 8\alpha + 20}$

$$\hookrightarrow \alpha^2 - 4\alpha + 8 = \alpha^2 - 8\alpha + 20$$

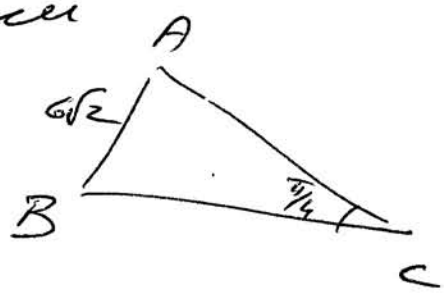
$$\hookrightarrow 4\alpha = 12 \Rightarrow \alpha = 3$$

$E_4)$ punctul este $\boxed{P(3,0)}$

Prof. Ovidiu Baoescu

M1/2017/V4
I/6

Calculați lungimea razei cercului circumscris $\triangle ABC$ cu $AB=6\sqrt{2}$ și $C=\frac{\pi}{4}$



E_1) Din T. sinusurilor

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\sin C}=2R$$

E_2) $$\frac{6\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{4}}=2R \Rightarrow \frac{6\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R$$

$$\Leftrightarrow 12=2R \Rightarrow \boxed{R=6}$$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2017/V4
I 1a)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 4^x \\ 1 & x & 2x \end{pmatrix}$

Arătați că $\det(A(1))=1$

$E_1)$ $\det(A(1))=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=4+4+1-2-4-2=$

$=9-8=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 4^x \\ 1 & x & 2x \end{pmatrix}$ M1/2017/V4 II 1b)

Arătați că $\det(A(x))=(2^x-1)(2^x+x-x\cdot 2^x)$

$E_1)\ \det(A(x))=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 4^x \\ 1 & x & 2x \end{vmatrix} \overset{\substack{C_2-C_1\to C_2 \\ C_3-C_1\to C_3}}{=\!=}$

$=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2^x-1 & 4^x-1 \\ 1 & x-1 & 2x-1 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 2^x-1 & 4^x-1 \\ x-1 & 2x-1 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2^x-1 & (2^x-1)(2^x+1) \\ x-1 & 2x-1 \end{vmatrix} \overset{\text{factor pe } L_1}{=\!=}$

$=(2^x-1)\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2^x+1 \\ x-1 & 2x-1 \end{vmatrix} =$

$=(2^x-1)(2x-1-(x-1)(2^x+1))=$

$=(2^x-1)(2x-1-x\cdot 2^x-x+2^x+1)=$

$=(2^x-1)(2^x+x-x\cdot 2^x)$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^x & 4^x \\ 1 & x & 2x \end{pmatrix}$ M1/2017/V4
II 1c)

Arătați că

$A(1)+A(2)+\dots+A(2017)=\begin{pmatrix} 2017 & 2017 & 2017 \\ 2017 & 2(2^{2017}-1) & \frac{4}{3}(4^{2017}-1) \\ 2017 & 2017\cdot 1009 & 2017\cdot 2018 \end{pmatrix}$

E1) $S=A(1)+A(2)+\dots+A(2017)=$

$=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^1 & 4^1 \\ 1 & 1 & 2\cdot 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^2 & 4^2 \\ 1 & 2 & 2\cdot 2 \end{pmatrix}+\dots+\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2^{2017} & 4^{2017} \\ 1 & 2017 & 2\cdot 2017 \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2017 & 2017 & 2017 \\ 2017 & 2+2^2+\dots+2^{2017} & 4+4^2+\dots+4^{2017} \\ 2017 & 1+2+\dots+2017 & 2(1+2+\dots+2017) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 2017 & 2017 & 2017 \\ 2017 & \frac{2\cdot(2^{2017}-1)}{2-1} & \frac{4(4^{2017}-1)}{4-1} \\ 2017 & \frac{2017\cdot 2018}{2} & 2\cdot\frac{2017\cdot 2018}{2} \end{pmatrix}$ (1009)

$=\begin{pmatrix} 2017 & 2017 & 2017 \\ 2017 & 2(2^{2017}-1) & \frac{4}{3}(4^{2017}-1) \\ 2017 & 2017\cdot 1009 & 2017\cdot 2018 \end{pmatrix}$

S-a folosit suma primilor termeni ai unei progresii geometrice cu $q\neq 1$, $S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V.6
II 2a)

Fie $x*y = 7xy + 7x + 7y + 6$

Arătați că $x*y = 7(x+1)(y+1) - 1$

$E_1)$ $7(x+1)(y+1) - 1 = 7(xy + x + y + 1) - 1 =$

$= 7xy + 7x + 7y + 7 - 1 =$

$= 7xy + 7x + 7y + 6 = x*y$

$E_2)$ Deci, $x*y = 7(x+1)(y+1) - 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x*y=7xy+7x+7y+6$, se știe că $x*y=7(x+1)(y+1)-1$, găsiți $x\in\mathbb{R}$ dacă

$$x*x*x=x$$

E_1) Din $x*y=7(x+1)(y+1)-1 \Rightarrow x*x=7(x+1)^2-1$

E_2) $x*x*x=\left(7(x+1)^2-1\right)*x=$

$$=7\left((7(x+1)^2-1)+1\right)(x+1)-1$$

$$=7\left(7(x+1)^2\right)(x+1)-1=7^2(x+1)^3-1$$

E_3) ecuația $x*x*x=x$ devine

$$7^2(x+1)^3-1=x \Leftrightarrow 7^2(x+1)^3=x+1$$

not $x+1=t \Rightarrow 49t^3=t \Rightarrow$

$$\Rightarrow 49t^3-t=0 \Rightarrow t(49t^2-1)=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ t_2=\frac{1}{7} \Rightarrow x+1=\frac{1}{7} \Rightarrow x=-\frac{6}{7} \\ t_3=-\frac{1}{7} \Rightarrow x+1=-\frac{1}{7} \Rightarrow x=-\frac{8}{7} \end{cases}$$

$$S_f: x\in\left\{-1;-\frac{6}{7};-\frac{8}{7}\right\}$$

Prof. Ovidiu Băescu

M1/2017/V4
II 2c)

Fie $x*y=7xy+7x+7y+6$, să se arate că $x*y=7(x+1)(y+1)-1$.

Arătați că dacă $a,b,c\in\mathbb{N}$ cu $a*b*c=48$, atunci $a=b=c$

E_1) Din $x*y=7(x+1)(y+1)-1 \Rightarrow$

$a*b*c=\left(7(a+1)(b+1)-1\right)*c=$

$=7\left((7(a+1)(b+1)-1)+1\right)(c+1)-1$

$=7^2(a+1)(b+1)(c+1)-1$

E_2) $a*b*c=48 \Leftrightarrow 49(a+1)(b+1)(c+1)-1=48$

$\Leftrightarrow 49\mid(a+1)(b+1)(c+1)=49 \mid :49$

$\Leftrightarrow (a+1)(b+1)(c+1)=1$

E_3) Dar, $a,b,c\in\mathbb{N} \Rightarrow a+1, b+1, c+1\in\mathbb{N}$

și cum $(a+1)(b+1)(c+1)=1 \Rightarrow \begin{cases} a+1=1 \\ b+1=1 \\ c+1=1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$, arătați că

$$f'(x)=\frac{-x^2+2x+3}{e^x}$$

E1) $f'(x)=\left(\frac{x^2-3}{e^x}\right)'=\frac{(x^2-3)'e^x-(x^2-3)(e^x)'}{e^{2x}}=$

$$=\frac{2x\cdot e^x-(x^2-3)e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(2x-x^2+3)}{e^{2x}}=$$

$$=\frac{-x^2+2x+3}{e^x}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V4

III 7i)

Fie $f(x) = \frac{x^2-3}{e^x}$, x cere ec. tg la Gp în $x=-1$

E1) ec. tg în $x=\alpha$ este $y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$

$\Rightarrow y - f(1) = f'(1)(x-1)$

E2) $f(1) = \frac{1-3}{e^1} = -\frac{2}{e}$

E3) $f'(1) = ?$

$$f'(x) = \frac{2x \cdot e^x - (x^2-3)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(2x-x^2+3)}{e^{2x}} =$$

$$= \frac{2x-x^2+3}{e^x}$$

$\Rightarrow f'(1) = \frac{2-1+3}{e} = \frac{4}{e}$

E4) ec. tg: $y + \frac{2}{3} = \frac{4}{e}(x-1) \mid \cdot 3e$

$3ey + 2e = 12(x-1) \Rightarrow 12x - 3ey - 12 - e = 0$

Prof. Ovidiu Bârlescu

M1/2017/V4
III 1c)

Fie $f(x)=\frac{x^2-3}{e^x}$, se știe că

$f'(x)=\frac{-x^2+2x+3}{e^x}$, arătați că: $-2e\le f(x)\le\frac{6}{e^3}$, $\forall x\ge -1$

$E_1)\ f'(x)=0 \Rightarrow -x^2+2x+3=0 \mid\cdot(-1)\Rightarrow$

$$x^2-2x-3=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 4}{2}\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}$$

$E_2)$

x	$-\infty$		-1		3		∞
f'	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
f	$\searrow$	$\searrow$	$-2e$	$\nearrow$	$\frac{6}{e^3}$	$\searrow$	0

$f'(-2)=\frac{-4-4+3}{e^{-2}}<0 \Rightarrow f'(x)<0,\ \forall x\in(-\infty;-1)$

$f'(0)=\frac{3}{e^0}>0 \Rightarrow f'(x)>0,\ \forall x\in(-1;3)$

$f'(4)=\frac{-16+8+3}{e^4}<0 \Rightarrow f'(x)<0,\ \forall x\in(3;\infty)$

$$f(-1)=\frac{1-3}{e^{-1}}=\frac{-2}{\frac{1}{e}}=-2e$$

$$f(3)=\frac{9-3}{e^3}=\frac{6}{e^3}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{l'H}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{e^x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{l'H}{=}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^x}\overset{\frac{2}{\infty}}{=}0$$

$E_3)\ f(x)\in\left[-2e;\frac{6}{e^3}\right]\cup\left(0;\frac{6}{e^3}\right]=\left[-2e;\frac{6}{e^3}\right]\Rightarrow$

$\Rightarrow -2e\le f(x)\le\frac{6}{e^3}$

Prof. Ovidiu Bârsan

XII/2017/V4
III 20)

Fie $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$, arătați că

$$\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}} f(x)\,dx = \ln\frac{3}{2}$$

E1) $I=\int_1^2 \frac{x+1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}dx=\int_1^2 \frac{1}{x+1}dx=$

$$=\frac{\ln|x+1|}{1}\Big|_1^2=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V4

III 261

Fie $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$, arătați că orice primitivă pt f este $\nearrow$ pe $(0,\infty)$

E_1) Fie $F(x)$ o primit oarecare pt $f(x)$

$\Rightarrow \begin{cases} F \text{ derivabilă} \\ F'(x)=f(x) \end{cases}$

E_2) $F'(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$ și cum $x\in(0,\infty) \Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}>0$

$\Rightarrow F'(x)>0 \Rightarrow F_s \nearrow$ pe $(0,\infty)$

$\Rightarrow$ o primit pt f este $\nearrow$ pe $(0,\infty)$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2017/V4

III 2 c)

Fie $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$, găsiți $m>0$ dacă aria dintre G_g, axa Ox și dreptele $x=1$ și $x=2$ este $1-\ln\frac{m+1}{m}$ unde $g(x)=\sqrt{x}(x+1)f(x)$

$E_1)$ $\mathcal{A}(G_g)=\int_1^2|g(x)|dx=\int_1^2\left|\sqrt{x}(x+1)\cdot\frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\right|dx=$

$=\int_1^2\left|\frac{x}{x+1}\right|dx$

$E_2)$ $x\in[1;2]\Rightarrow\frac{x}{x+1}>0\Rightarrow\mathcal{A}(G_g)=\int_1^2\frac{x}{x+1}dx=$

$=\int_1^2\frac{x+1-1}{x+1}dx=\int_1^2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx=$

$=x\Big|_1^2-\frac{\ln|x+1|}{1}\Big|_1^2=(2-1)-(\ln 2-\ln 1)=$

$=1-\ln 2$

$E_3)$ $\mathcal{A}(G_g)=1-\ln\frac{m+1}{m}\Rightarrow$

$\Rightarrow 1-\ln\frac{m+1}{m}=1-\ln 2\Rightarrow\ln\frac{m+1}{m}=\ln 2$

$\Rightarrow\frac{m+1}{m}=2\Rightarrow m+1=2m\Rightarrow m=1>0$

$\Rightarrow m=1$ CORECT

Prof. Ovidiu Radescu