Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

SESIUNE SPECIALĂ

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=2+i$. Arătați că $z+\overline{z}+z\overline{z}=9$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1,m)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(1-\log_2 x)(2-\log_2 x)=0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităților.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,1)$, $B(3,3)$ și $C(0,2)$. Determinați lungimea medianei din C a triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $\left(1+\text{tg}^2 x\right)\cos^2 x-\left(1+\text{ctg}^2 x\right)\sin^2 x=0$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & a\\ -2 & -1 & 3\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+2z=0\\ x+2y+az=0\\ -2x-y+3z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(9))=0$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Demonstrați că, dacă sistemul are soluția (x_0,y_0,z_0), cu x_0, y_0 și z_0 numere reale nenule, atunci $-x_0+y_0+z_0=11(x_0+y_0+z_0)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy+7x+7y+42$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=(x+7)(y+7)-7$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, știind că $x\circ x=x$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $2017^a\circ(-6)=1$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{1-x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $x\ln x>x-1$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+3x^2$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(f(x)-3x^2\right)dx=e-1$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 xf(x)dx=\frac{7}{4}$.

5p **c)** Determinați numărul natural nenul n, pentru care suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-e^x$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=n$ are aria egală cu n^2-n+1.

M1/2017/V2

I/1

Fie $z=2+i$, arătați că: $z+\bar{z}+2\bar{z}=9$

E1) $\bar{z}=2-i$

E2) $z+\bar{z}+2\bar{z}=(2+i)+(2-i)+(2+i)(2-i)=$

$=4+(4-i^2)=8+1=9$ pt că $i^2=-1$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V2
I/2

Găsiți $m \in \mathbb{R}$ dacă $A(1; m) \in G_f$ unde $f(x) = x^2 + 2x - 3$

$E_1)$ $A(1; m) \in G_f \Leftrightarrow f(1) = m$

$E_2)$ în cazul nostru, $f(1) = m \Leftrightarrow 1 + 2 - 3 = m$

$\Leftrightarrow m = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

X(1)/2019/V2
I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$(1-\log_2 x)(2-\log_2 x)=0$$

E_1) Cond: $x>0 \Rightarrow I_C=(0;\infty)$

E_2) $(1-\log_2 x)(2-\log_2 x)=0 \Leftrightarrow$

$$1-\log_2 x=0$$

sau

$$2-\log_2 x=0$$

E_3) $1-\log_2 x=0 \Leftrightarrow \log_2 x=1 \Leftrightarrow x=2 \in I_C$

$2-\log_2 x=0 \Leftrightarrow \log_2 x=2 \Leftrightarrow x=2^2=4 \in I_C$

$S_f: x\in\{2;4\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V2

I/4

Calculați probabilitatea ca alegând un număr natural de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor strict mai mică decât cifra unităților

---

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile: toate nr. naturale de două cifre, $\overline{ab}$ cu $a \to 9$ v, $b \to 10$ v ind $\Big\} \to 90$ numere

$E_3)$ nr. caz favorabile: toate nr. naturale de două cifre $\overline{ab}$ cu $a < b$

$a = 1 \to 1 < b \to b \in \{2; 3; \dots; 9\} \to 8$ numere

$a = 2 \to 2 < b \to b \in \{3; 4; \dots; 9\} \to 7$ numere

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

$a = 7 \to 7 < b \to b \in \{8; 9\} \to 2$ numere

$a = 8 \to 8 < b \to b = 9 \to 1$ număr

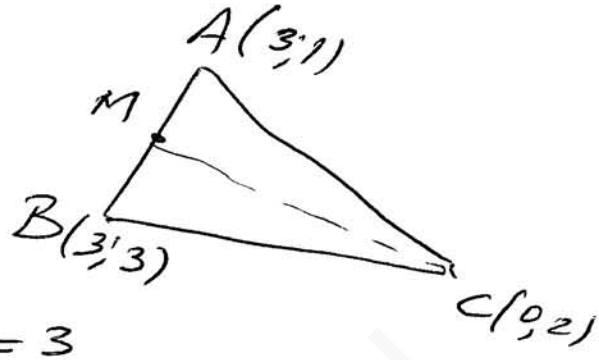
favorabile: $8 + 7 + \dots + 1 = \dfrac{8 \cdot 9}{2} = 36$

$E_4)$ $P = \dfrac{36^{\,|2}}{90} = \dfrac{18^{\,|9}}{45} = \dfrac{2}{5}$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2017/V2

Fie $A(3;1)$, $B(3,3)$, $C(0,2)$, să se scrie lungimea medianei din C I/5



E_1) M mijl lui AB

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+3}{2} = 3 \\ y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+3}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow M(3;2)$$

E_2) $CM = \sqrt{(x_C - x_M)^2 + (y_C - y_M)^2} = \sqrt{(0-3)^2 + (2-2)^2} =$

$$= \sqrt{9+0} = 3$$

$\Rightarrow CM = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V2

I/6

Arătați că:

$$(1+tg^2x)\cos^2x-(1+ctg^2x)\sin^2x=0,$$

$$\forall x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$$

E1) $M_1=\left(1+\frac{\sin^2x}{\cos^2x}\right)\cos^2x-\left(1+\frac{\cos^2x}{\sin^2x}\right)\sin^2x=$

$=\frac{\overbrace{\cos^2x+\sin^2x}^{1}}{\cos^2x}\cdot\cos^2x-\frac{\overbrace{\sin^2x+\cos^2x}^{1}}{\sin^2x}\cdot\sin^2x=$

$=1-1=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V2
II 1a)

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Arătați că $\det(A(9))=0$

$E_1)$ $\det(A(9))=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=$

$= 6-18-2+8+9-3=$

$= 23-23=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V2

II 1b)

Fie $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+2y+az=0 \\ -2x-y+3z=0 \end{cases}$

Găsiți $a \in \mathbb{R}$ dacă sistemul are soluție unică

E_1) sistemul are soluție unică $\Leftrightarrow \det S \neq 0$

E_2) $\det S = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6-2a-2+8+a-3 =$

$= 9-a$

E_3) $\det S \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 9 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{9\}$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2017/V2
II 1 c)

Fie $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+2y+9z=0 \\ -2x-y+3z=0 \end{cases}$

Arătați că dacă sistemul are soluția (x_0, y_0, z_0) cu x_0, y_0, z_0 numere reale nenule, atunci

$$-x_0+y_0+z_0 = 11(x_0+y_0+z_0)$$

E_1) sist are soluție nenulă $\Leftrightarrow$ det $S=0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & a \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 6-2a-2+8+a-3=0$$

$$\Leftrightarrow 9-a=0 \Leftrightarrow a=9$$

E_2) $a=9 \Rightarrow$ sistemul $\begin{cases} x+y+2z=0 \\ x+2y+9z=0 \\ -2x-y+3z=0 \end{cases}$

$\det S=0 \Rightarrow$ nu pot aplica CRAMER

rang $A=?$, $|1|=1\neq 0 \Rightarrow \text{rang } A \geq 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1=1\neq 0 \Rightarrow \text{rang } A \geq 2$, bordăm

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 9 \\ -2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ și $\nexists$ altă bordare $\Rightarrow \text{rang } A = 2$,

$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ și $\nexists$ all $\Delta_c \Rightarrow$ sist compatibil

E_3) Sist ppl. este $\begin{cases} x+y=-2\alpha \\ x+2y=-9\alpha \end{cases}$, $z=\alpha$

"$-$": $-y=7\alpha \Rightarrow y=-7\alpha$, înlocuiesc

$\Rightarrow \boxed{x=5\alpha} \Rightarrow x_0=5\alpha$, $\boxed{y_0=-7\alpha}$, $\boxed{z_0=\alpha}$

E_4) $-x_0+y_0+z_0=11(x_0+y_0+z_0) \Leftrightarrow -5\alpha-7\alpha+\alpha=11(5\alpha-7\alpha+\alpha)$

$\Leftrightarrow -11\alpha=-11\alpha$ adev.

Prof. Ovidiu Bădescu

XII/2017/VC

II 2 a)

Fie $x \circ y = xy + 7x + 7y + 42$, arătați că $x \circ y = (x+7)(y+7) - 7$

$E_1)$ $(x+7)(y+7) - 7 = (xy + 7x + 7y + 49) - 7 =$

$= xy + 7x + 7y + 42 = x \circ y$

$E_2) \Rightarrow x \circ y = (x+7)(y+7) - 7$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V2

Fie $x \circ y = xy + 7x + 7y + 42$, știind că $x \circ y = (x+7)(y+7) - 7$, rezolvați ecuația $x \circ x = x$ II 2b)

E_1) $x \circ x = x \Rightarrow x^2 + 7x + 7x + 42 = x$

$\Rightarrow x^2 + 13x + 42 = 0$

E_2) $x_{1,2} = \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 168}}{2 \cdot 1} = \frac{-13 \pm 1}{2} \begin{cases} \frac{-12}{2} = -6 \\ \frac{-14}{2} = -7 \end{cases}$

E_3) $S_f : x \in \{-6, -7\}$

Obs.: Dacă eram deștepți foloseam

$x \circ y = (x+7)(y+7) - 7 \Rightarrow$ ec. devine

$(x+7)(x+7) - 7 = x$

$\Leftrightarrow (x+7)^2 = x + 7 \Rightarrow x + 7 \in \{0, 1\}$

$\Rightarrow x \in \{-7, -6\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/v2
II 2 c)

Fie $x \circ y = xy + 7x + 7y + 42$, găsiți $a \in \mathbb{R}$ dacă $2017^a \circ (-6) = 1$, știind că $x \circ y = (x+7)(y+7) - 7$

E_1) folosind $x \circ y = (x+7)(y+7) - 7 \Rightarrow$ ec devine

$$2017^a \circ (-6) = 1 \Leftrightarrow$$

$$(2017^a + 7)(-6+7) - 7 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2017^a + 7 \cdot 1 = 8$$

$$\Leftrightarrow 2017^a = 1$$

E_2) baza $2017 > 1$ $\Rightarrow a = 0$

Prof. Ovidiu Pădescu

M1/2017/V2

III 10a)

Fie $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-x}$

Arătați că $f'(x)=\dfrac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$

Ex) $f'(x)=\left(\dfrac{\ln x}{1-x}\right)'=\dfrac{(\ln x)'(1-x)-\ln x(1-x)'}{(1-x)^2}=$

$=\dfrac{\frac{1}{x}(1-x)-\ln x\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\dfrac{\frac{1-x}{x}+\ln x}{(1-x)^2}=$

$=\dfrac{1-x+x\ln x}{x(1-x)^2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2019/var
III 15)

Fie $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-x}$

Găsiți ec. asimpt orizontale spre ∞ a G.f

E1) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{1-x}\overset{\frac{\infty}{-\infty}}{\underset{l'H}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{-1}=0$

$\Rightarrow y=0$ as. oriz spre ∞

Prof. Ovidiu Bădescu

Arătați că: $x \ln x > x-1, \forall x \in (1;\infty)$ XII/2017/V. III 9c)

E_1) inec devine: $x \ln x - x + 1 > 0$

E_2) Fie $g:(1;\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = x \ln x - x + 1$

$$g'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1$$

$$g'(x) = \ln x$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = e^0 \Rightarrow x = 1 \notin A_f$$

E_3)

x	$(1$	
g'	$\parallel$	$+ + + + +$
g	$\parallel$	$\nearrow$

g' nu are rădăc, pt a-i găsi semnul calculăm

$$g'(e) = \ln e = 1 > 0 \Rightarrow g'(x) > 0 \text{ pe } (1;\infty)$$

$\Rightarrow g$ $\nearrow$ pe $(1;\infty)$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (x \ln x - x + 1) \overset{0 \cdot (-\infty) - 0 + 1}{=\!=\!=}$$

Fie $l_1 = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x \ln x = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{\infty}\ l'H}{=\!=\!=}$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (-x) = 0$$

$\Rightarrow$

x	$(1$	
g'	$\parallel$	$+ + +$
g	$\parallel (0$	$\nearrow$

$\Rightarrow g(x) \geq 0 \Rightarrow x \ln x - x + 1 > 0, \forall x \in (1;\infty)$

Prof. Ovidiu Rădescu

M1/2017/S2

II 2a)

Fie $f(x)=e^x+3x^2$, arătați că

$$\int_0^1 (f(x)-3x^2)\,dx = e-1$$

$\in_1)$ $I=\int_0^1 (f(x)-3x^2)\,dx=\int_0^1 (e^x+3x^2-3x^2)\,dx=$

$=\int_0^1 e^x\,dx = e^x\Big|_0^1 = e^1-e^0 = e-1$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V2

III 261

Fie $f(x)=e^x+3x^2$, arătați că

$$\int_0^1 x f(x)dx=\frac{7}{4}$$

$E_1)$ $I=\int_0^1 x f(x)dx=\int_0^1 x(e^x+3x^2)dx=$

$=\int_0^1(xe^x+3x^3)dx=\int_0^1 xe^x dx+\int_0^1 3x^3 dx$

$E_2)$ Fie $I_1=\int_0^1 xe^x dx$

$f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$

$g'(x)=e^x \Rightarrow g(x)=e^x$

$I_1=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x dx=$

$=(1e^1-0\cdot e^0)-e^x\Big|_0^1=$

$=e-0-(e^1-e^0)=e-e+1=1$

$E_3)$ Fie $I_2=\int_0^1 3x^3 dx=3\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{3}{4}(1-0)=\frac{3}{4}$

$E_4)$ $I=I_1+I_2=1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/V2

Fie $f(x)=e^x+3x^2$, găsiți $n\in\mathbb{N}^*$ dacă (II 2c)
aria dintre G_g, axa Ox și dreptele $x=0$ și $x=n$
are aria n^2-n+1 unde $g(x)=f(x)-e^x$

$E_1)$ $\mathcal{A}(G_g)=\int_0^n |g(x)|dx=\int_0^n |f(x)-e^x|dx=$

$=\int_0^n |e^x+3x^2-e^x|dx=\int_0^n |3x^2|dx$

$E_2)$ Cum $x^2\geq 0\Rightarrow 3x^2\geq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{A}(G_g)=\int_0^n 3x^2dx=\cancel{3}\cdot\frac{x^3}{\cancel{3}}\Big|_0^n=n^3$

$E_3)$ $n^3=n^2-n+1\Rightarrow n^3-n^2+n-1=0$

$\Rightarrow n^2(n-1)+(n-1)=0\Rightarrow(n-1)(n^2+1)=0$

$\Rightarrow$ $\begin{cases} n-1=0\Rightarrow n=1 \\ \text{sau} \\ n^2+1=0\Rightarrow n\notin\mathbb{N} \end{cases}$

$S_f:\boxed{n=1}$

Prof. Ovidiu Badescu