Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Arătați că $\frac{2+i}{2-i}+\frac{2-i}{2+i}=\frac{6}{5}$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-(2m+3)x+m^2+3m+2=0$. Arătați că $(x_1-x_2)^2=1$, pentru orice număr real m.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x-3}=5-x$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma doar cu cifre pare.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC și punctele M, N și P, mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. Demonstrați că $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{BP}$.

5p **6.** Determinați numerele reale x, știind că $\sin 2x=\cos x$ și $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & a & 3\\ 1 & 3 & a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y+z=1\\ x+ay+3z=2\\ x+3y+az=2\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(a))=(a+1)(a-3)$, pentru orice număr real a.

5p **b)** Determinați numerele reale m pentru care $A(m)A(2-m)=A(2-m)A(m)$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-5xy+10x+10y-18$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2-5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele naturale n, știind că $(n*n)*n=n$.

5p **c)** Arătați că, dacă $a*a=b$ și $b*b=a$, atunci $a=b=2$ sau $a=b=\frac{9}{5}$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

5p **a)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{2x}=\frac{1}{e^2}$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr real a, $a\in\left(-\sqrt{2},-1\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ și, pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\,dx=2\left(\sqrt{2}-1\right)$.

5p **b)** Demonstrați că $I_n\le\frac{1}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+1)I_n=2\sqrt{2}-2nI_{n-1}$, pentru orice număr natural n, $n\ge 2$.

Arătați că $\frac{2+i}{2-i} + \frac{2-i}{2+i} = \frac{6}{5}$

$E_1)$ $\frac{(2+i)}{2+i} + \frac{(2-i)}{2-i} = \frac{(2+i)^2 + (2-i)^2}{4-i^2} =$

$= \frac{4+4i+i^2+4-4i+i^2}{4+1} = \frac{4-1+4-1}{5} = \frac{6}{5}$

Prof. Ovidiu Bădescu

VS XI

x_1, x_2 rădăcini ale $x^2-(2m+3)x+m^2+3m+2=0$

Se cere $(x_1-x_2)^2=1$

$E_1) (x_1-x_2)^2 = x_1^2-2x_1x_2+x_2^2 = S^2-2P-2P =$

$= S^2-4P$

$E_2)$ din VIETE $\Rightarrow S=-\frac{b}{a}=\frac{2m+3}{1}=2m+3$

$P=\frac{c}{a}=\frac{m^2+3m+2}{1}=m^2+3m+2$

$E_3)\ S^2-4P=(2m+3)^2-4(m^2+3m+2)=$

$=4m^2+12m+9-4m^2-12m-8=$

$=1$

Prof. Ovidiu Bălescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$: $\sqrt{x-3}=5-x$

$E_1)$ $\sqrt{x-3}=5-x \mid (\,)^2 \Rightarrow x-3=25-10x+x^2$

$\Leftrightarrow x^2-11x+28=0$

$$x_{1,2}=\frac{11\pm\sqrt{121-112}}{2\cdot 1}=\frac{11\pm 3}{2}\begin{matrix}\nearrow 7\\ \searrow 4\end{matrix}$$

sunt soluții posibile

$E_2)$ le verific în ecuație

$x_1=7: \sqrt{7-3}=5-7 \Leftrightarrow 2=-2$ fals $\Rightarrow$

$x_1=7$ nu e soluție

$x_2=4: \sqrt{4-3}=5-4 \Leftrightarrow 1=1$ adev $\Rightarrow$

$x_2=4$ e soluție

$S_f: x=4$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma doar cu cifre pare

---

E1) $N = \overline{abc}$ cu a, b, c distincte și pare

E2) $a \in \{2; 4; 6; 8\} \Rightarrow a$ are 4 v

$b \in \{0; 2; 4; 6; 8\} \setminus \{a\} \Rightarrow b$ are 4 v (nu cu $b \neq a$)

$c \in \{0; 2; 4; 6; 8\} \setminus \{a; b\} \Rightarrow c$ are 3 v

sunt independente

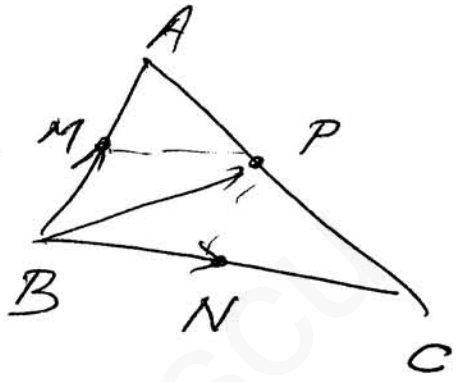
$\Rightarrow 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ numere

Prof. Ovidiu Bădescu

VS VII

Fie $\triangle ABC$, M, N, P mijloace pt. AB, I/5
BC respectiv AC.

Se cere: $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BP}$



E1) $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} =$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{BP}$ pt

că BP mediană

---

met II: M, P mijloacele laturilor $\Rightarrow$ MP l mijl

$\Rightarrow MP \parallel BC \Rightarrow BNPM$ paralelogr

Analog, $NP \parallel BA$

$\Rightarrow \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BP}$

Prof. Ovidiu Badescu

Găsiți $x \in \mathbb{R}$ dacă $\sin 2x = \cos x$ unde $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

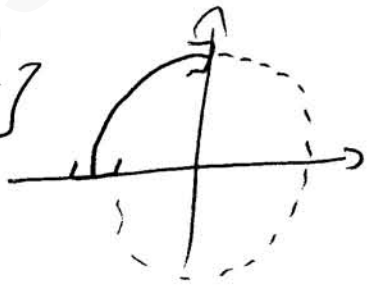
E_1) Ec. devine : $2 \sin x \cos x = \cos x$

$$2 \sin x \cos x - \cos x = 0$$

$$\cos x \cdot (2 \sin x - 1) = 0 \Rightarrow$$

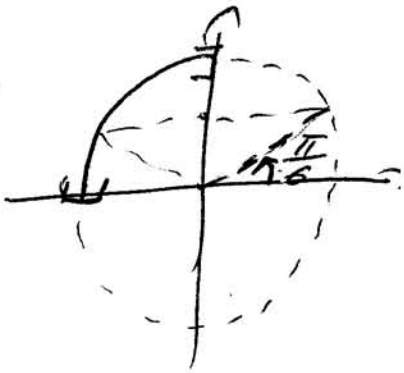
$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \text{sau} \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

E_2) Caz I : $\cos x = 0$ și cum $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$



din cerc avem $x = \frac{\pi}{2}$

Caz II : $\sin x = \frac{1}{2}$ și cum $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$



din cerc avem $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

Obs : există și metodă generală

$$\cos x = 0 \Rightarrow x \in \{\arccos 0 + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\arccos 0 + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Dar, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x \in \{\arcsin \tfrac{1}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin \tfrac{1}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$x \in \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Dar, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right] \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$

Prof. Ovidiu Badescu

II 1a)

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$, arătați că

$$\det(A(a))=(a+1)(a-3),\ \forall a\in\mathbb{R}$$

$E_1)$ $\det A(a)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 3 & a \end{vmatrix}=a^2+3+3-a-9-a=$

$$=a^2-2a-3$$

$E_2)$ Folosim $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

$$a^2-2a-3=0\Rightarrow a_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm 4}{2}\begin{matrix}\nearrow 3\\ \searrow -1\end{matrix}$$

$$\Rightarrow a^2-2a-3=1(a-3)(a+1)$$

$$\Rightarrow \det(A(a))=(a+1)(a-3)$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 3 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$, găsiți $m \in \mathbb{R}$

dacă $A(m)\,A(2-m)=A(2-m)\,A(m)$

$E_1)$ $A(m)\,A(2-m)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 3 \\ 1 & 3 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2-m & 3 \\ 1 & 3 & 2-m \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 1+(2-m)+3 & 1+3+(2-m) \\ 1+m+3 & 1+m(2-m)+9 & 1+3m+3(2-m) \\ 1+3+m & 1+3(2-m)+3m & 1+9+m(2-m) \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3 & 6-m & 6-m \\ m+4 & -m^2+2m+10 & 7 \\ m+4 & 7 & -m^2+2m+10 \end{pmatrix}$$

$E_2)$ analog, $A(2-m)\,A(m)=\begin{pmatrix} 3 & m+4 & m+4 \\ 6-m & -m^2+2m+10 & 7 \\ 6-m & 7 & -m^2+2m+10 \end{pmatrix}$

$E_3)$ Egalând cele 2 rezultate $\Rightarrow$

$\Rightarrow 6-m=m+4 \Rightarrow -2m=-2 \Rightarrow \boxed{m=1}$

(celelalte elemente fiind egale)

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+ay+3z=2 \\ x+3y+az=2 \end{cases}$, știm că $\det S=(a+1)(a-3)$,

se cere $a=?$, $a\in\mathbb{Z}$ dacă sist are soluții unică (x_0,y_0,z_0) iar $x_0,y_0,z_0\in\mathbb{Z}$

E_1) sist are sol unică $\Leftrightarrow \det S\neq 0 \Leftrightarrow a\in\mathbb{Z}\setminus\{-1;3\}$

E_2) $\Delta_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & a & 3 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix}=a^2+6+6-2a-9-2a=a^2-4a+3=$
$=(a-1)(a-3)$

$\Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=2a+3+2-2-6-a=a-3$

$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}=2a+2+3-a-6-2=a-3$

E_3) $x=\frac{\Delta_x}{\det S}=\frac{(a-1)(a-3)}{(a+1)(a-3)}=\frac{a-1}{a+1}$; $y=\frac{\Delta_y}{\det S}=\frac{1}{a+1}$; $z=\frac{1}{a+1}$

E_4) $\begin{cases} x_0=\frac{a-1}{a+1}\in\mathbb{Z} \\ y_0=\frac{1}{a+1}\in\mathbb{Z} \\ z_0=\frac{1}{a+1}\in\mathbb{Z} \end{cases}$ $y_0=\frac{1}{a+1}\in\mathbb{Z}\Rightarrow a+1\in\Delta_1\Rightarrow a+1\in\{-1;1\}$

$\Rightarrow a\in\{-2;0\}$

Pt $a\in\{-2;0\}\Rightarrow y_0\in\mathbb{Z}$, $z_0\in\mathbb{Z}$

Verific dacă și $x_0\in\mathbb{Z}$

$a=-2\Rightarrow x_0=\frac{-2-1}{-2+1}=3\in\mathbb{Z}$ ok

$a=0\Rightarrow x_0=\frac{1}{-1}=-1\in\mathbb{Z}$ ok

E_5) $x_0,y_0,z_0\in\mathbb{Z}\Rightarrow \boxed{a\in\{0;-2\}}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $x * y = -5xy + 10x + 10y - 18$

Arătați că: $x * y = 2 - 5(x-2)(y-2)$

E,) Calculăm $N = 2 - 5(x-2)(y-2) \Rightarrow$

$N = 2 - 5(xy - 2x - 2y + 4) = 2 - 5xy + 10x + 10y - 20 =$

$= -5xy + 10x + 10y - 18 = x * y$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x*y=-5xy+10x+10y-18$, se știe că

$$x*y=2-5(x-2)(y-2) \quad (1)$$

Găsiți $n\in\mathbb{N}$ dacă $(n*n)*n=n$

$E_1)$ $(n*n)*n \overset{(1)}{=} \underbrace{\left(2-5(n-2)(n-2)\right)}_{\alpha} *\underbrace{n}_{\beta} \overset{(1)}{=}$

$= 2-5\left(2-5(n-2)(n-2)-2\right)(n-2) =$

$= 2-5\left(-5(n-2)^2\right)(n-2) =$

$= 2+5^2(n-2)^3$

$E_2)$ ec. devine: $2+5^2(n-2)^3=n$

$\Rightarrow 5^2(n-2)^3=n-2$

$E_3)$ not $n-2=t \Rightarrow 5^2t^3=t \Rightarrow$

$t(5^2t^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=0 \\ \text{sau} \\ t^2=\frac{1}{25} \rightarrow t=\pm\frac{1}{5} \end{cases}$

$E_4)$ $t=0 \Rightarrow n-2=0 \Rightarrow n=2\in\mathbb{N}$, ok.

$t=\frac{1}{5} \Rightarrow n-2=\frac{1}{5} \Rightarrow n=2+\frac{1}{5}=\frac{11}{5}\notin\mathbb{N}$, k.o.

$t=-\frac{1}{5} \Rightarrow n-2=-\frac{1}{5} \Rightarrow n=2-\frac{1}{5}=\frac{9}{5}\notin\mathbb{N}$, k.o.

S_f: $n=2$

sau mergea cu Horner ridicând la puterea a 3-a

Fie $x*y=-5xy+10x+10y-18$, să se arate că $x*y=2-5(x-2)(y-2)$, arătați că

dacă $a*a=b$ și $b*b=a$, atunci $a=b=2$

sau $a=b=\frac{9}{5}$

$E_1)$ $a*a=b \Rightarrow 2-5(a-2)^2=b$ (1)

$b*b=a \Rightarrow 2-5(b-2)^2=a$ (2)

$E_2)$ înlocuim $b=2-5(a-2)^2$ în relația (2)

$\Rightarrow 2-5\left(2-5(a-2)^2-2\right)^2=a$

$2-5\cdot 25(a-2)^4=a$

$-125(a-2)^4=a-2$

$E_3)$ notez $a-2=t \Rightarrow -125t^4=t \Rightarrow 125t^4+t=0$

$\Rightarrow t(125t^3+1)=0 \Rightarrow$ $t_1=0$ sau $t^3=-\frac{1}{125} \Rightarrow t=-\frac{1}{5}$

$E_4)$ $t_1=0 \Rightarrow a-2=0 \Rightarrow \boxed{a=2}$ și $b=2-5(a-2)^2$

$\Rightarrow b=2-5\cdot 0 \Rightarrow \boxed{b=2}$

$t_2=-\frac{1}{5} \Rightarrow a-2=-\frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{a=2-\frac{1}{5}=\frac{9}{5}}$ și $b=2-5(a-2)^2$

$\Rightarrow b=2-5\left(\frac{9}{5}-2\right)^2=2-5\cdot\frac{1}{25}=\frac{9}{5} \Rightarrow \boxed{b=\frac{9}{5}}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

Găsiți intervalele de monotonie ale lui f

$E_1)$ $f'(x)=\dfrac{1\cdot\sqrt{x^2+2x+2}-x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+2x+2}}\cdot(x^2+2x+2)'}{\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)^2}$

$f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}-\dfrac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}}}{x^2+2x+2}=\dfrac{\dfrac{x^2+2x+2-x^2-x}{\sqrt{x^2+2x+2}}}{x^2+2x+2}$

$f'(x)=\dfrac{x+2}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$

$E_2)$ $f'(x)=0\Rightarrow x+2=0\Rightarrow x=-2$ și numitorul >0 $\forall x\in\mathbb{R}$, $\Delta<0$

$E_3)$

x		-2	
f'	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	0	$+\ +\ +$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$E_4)$ f descrescătoare pe $(-\infty;-2]$

f crescătoare pe $[-2;\infty)$

Prof. Ovidiu Băduț

VS 2"

Fie $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, arătați că $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x))^{2x}=\dfrac{1}{e^2}$

E1) $l=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}\right)^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2+2x+2}\right)^{x}$

$\overset{1^\infty}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{x^2}{x^2+2x+2}-1\right)^{x}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{\cancel{x^2}\cancel{+x^2}-2x-2}{x^2+2x+2}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-2x-2}{x^2+2x+2}\right)^{x}$

E2) $l=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-2x-2}{x^2+2x+2}\right)^{\frac{x^2+2x+2}{-2x-2}}\right]^{\frac{-2x-2}{x^2+2x+2}\cdot x}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2-2x}{x^2+2x+2}}$ $\quad\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(-2-\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}$

$=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$

Prof. Cristian Badescu

Fie $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$, se știe că $f'(x)=\frac{x+2}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$

se cere să arătăm că $\forall a\in(-\sqrt{2};-1)$, ec. $f(x)=a$ are exact două soluții reale distincte

---

$E_1)\ f(x)=a \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}-a=0$

$E_2)$ Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}-a \Rightarrow$

$g'(x)=\frac{x+2}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$ -0 și $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2$

$E_3)$

x	$-\infty$		-2		∞
g'		$-$	0	$+$	
g	$-1-a$	$\searrow$	$-\sqrt{2}-a$	$\nearrow$	$1-a$

$E_4)\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}-a\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}-a\right)=-1-a$

$g(-2)=\frac{-2}{\sqrt{4-4+2}}-a=\frac{-2}{\sqrt{2}}-a=\frac{-2\sqrt{2}}{2}-a=-\sqrt{2}-a$

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}-a\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}-a\right)=1-a$

$E_5)$ șirul lui Rolle este $(\operatorname{sgn}(-1-a);\ \operatorname{sgn}(-\sqrt{2}-a);\ \operatorname{sgn}(1-a))$

$E_6)$

a			$(-\sqrt{2}$		$-1)$			1		
$-1-a$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$
$-\sqrt{2}-a$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$1-a$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$

$E_7)$ Pt $a\in(-\sqrt{2};-1)\Rightarrow$ șirul lui Rolle este $(+;-;+)\Rightarrow$

sunt două rădăcini reale distincte

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$, arătați că

$$\int_0^1 f(x)dx = 2(\sqrt{2}-1)$$

E1) $I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$

not $t=x+1 \mid ()' \Rightarrow dt=dx$

$x=0 \Rightarrow t=1$; $x=1 \Rightarrow t=2$

E2 / $I=\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}}dt=\int_1^2 t^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\Big|_1^2=$

$=\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_1^2=2\sqrt{t}\Big|_1^2=2(\sqrt{2}-1)$

---

met 2: $I=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx=\int_0^1 (x+1)^{-\frac{1}{2}}dx=$

$=\frac{\frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}}{1}\Big|_0^1=\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Big|_0^1=2\sqrt{x+1}\Big|_0^1=$

$=2(\sqrt{2}-\sqrt{1})=2(\sqrt{2}-1)$

s-a folosit: $\int_a^b f(ax+b)dx=\frac{\text{formula pt } f}{a}$,

de exemplu $\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos(3x+\frac{\pi}{4})dx=\frac{\sin(3x+\frac{\pi}{4})}{3}\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ și $I_n=\int_0^1 x^n \cdot f(x)\,dx$

Arătați că $I_n \leq \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

E1) $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x+1}}dx$

E2) $x\in[0;1] \Rightarrow x+1 \in [1;2] \Rightarrow \sqrt{x+1}\in[1;\sqrt{2}]$

$\Rightarrow \sqrt{x+1} \geq 1 \Rightarrow \frac{x^n}{\sqrt{x+1}} \leq x^n \Big| \int_0^1 \dots dx$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x+1}}dx \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1$

$I_n \leq \frac{1}{n+1} - 0 \Rightarrow I_n \leq \frac{1}{n+1}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ și $I_n=\int_0^1 x^n\cdot f(x)\,dx$

Arătați că: $(2n+1)I_n=2\sqrt{2}-2nI_{n-1}$

E1) $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$f(x)=x^n \Rightarrow f'(x)=nx^{n-1}$

$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow g(x)=\int (x+1)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}=2\sqrt{x+1}$

E2) $I_n=2x^n\sqrt{x+1}\Big|_0^1-2n\int_0^1 x^{n-1}\cdot\sqrt{x+1}\,dx$

$I_n=2\sqrt{2}-0-2n\int_0^1\frac{x^{n-1}(x+1)}{\sqrt{x+1}}\,dx$

$I_n=2\sqrt{2}-2n\int_0^1\left(\frac{x^n}{\sqrt{x+1}}+\frac{x^{n-1}}{\sqrt{x+1}}\right)dx$

$I_n=2\sqrt{2}-2n\left(I_n+I_{n-1}\right)$

$I_n=2\sqrt{2}-2nI_n-2nI_{n-1}$

$I_n(2n+1)=2\sqrt{2}-2nI_{n-1}$

S-a folosit: $\int f(ax+b)\,dx=\frac{\text{rezultat}}{a}+C$

Prof. Ovidiu Bănescu