Simularea examenului de bacalaureat național 2017
Proba E. c) - 26.01.2017
M_mate-info

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

Subiectul I **(30 puncte)**

5p 1. Calculați modulul numărului complex z, unde $z=\dfrac{2i}{3-4i}$.

5p 2. Determinați $m\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, astfel încât parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(m+2)x^2-2mx+1$ să intersecteze axa Ox în două puncte distincte.

5p 3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_3^2 x-2\log_3 x-3=0$.

5p 4. Determinați câte numere de trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $M=\{0,1,2,3,4\}$.

5p 5. Se consideră triunghiul ABC și punctele M,N,P mijloacele laturilor AB, BC, respectiv AC. Demonstrați că $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.

5p 6. Se consideră triunghiul ABC cu vârfurile $A(-2,3)$, $B(2,2)$, $C(3,4)$. Determinați ecuația înălțimii din A.

Subiectul II **(30 puncte)**

1. Fie $m\in\mathbb{R}$, sistemul de ecuații $\begin{cases}x+y-z=0\\2x+m^2y-z=0\\-2x-3y+3z=m-1\end{cases}$ și A matricea sistemului.

5p a) Calculați $\det(A)$.

5p b) Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul este compatibil nedeterminat.

5p c) Pentru $m=1$, arătați că $E=\dfrac{x_0^2+y_0^2+z_0^2}{x_0^2-2y_0^2+3z_0^2}$ este constantă, pentru orice soluție nebanală (x_0,y_0,z_0) a sistemului.

2. Fie mulțimea $G=\left\{A(a)=\begin{pmatrix}1-2a & a\\-6a & 1+3a\end{pmatrix}, a\in(-1,\infty)\right\}$.

5p a) Demonstrați că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

5p b) Arătați că $(G,\cdot)$ este grup abelian.

5p c) Calculați $\begin{pmatrix}-1 & 1\\-6 & 4\end{pmatrix}^{2017}$.

Subiectul III **(30 puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(x+1)$.

5p a) Demonstrați că $x\geq\ln(x+1)$, $\forall x\in(-1,\infty)$.

5p b) Determinați asimptotele graficului funcției.

5p c) Fie șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_0>0$, $x_{n+1}=f(x_n)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2. Pentru $n\in\mathbb{N}^*$ se definește $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{(x+1)^2}dx$.

5p a) Calculați I_0.

5p b) Demonstrați că $I_{n+2}+2I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

5p c) Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/S1
I/1

Calculați $|z|$ dacă $z = \frac{2i}{3-4i}$

E1) $|z| = \left|\frac{2i}{3-4i}\right| = \frac{|2i|}{|3-4i|} = \frac{\sqrt{0^2+2^2}}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} =$

$= \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{25}} = \frac{2}{5}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ dacă parabola asociată funcției $f(x) = (m+2)x^2 - 2mx + 1$ să intersecteze Ox în 2 puncte distincte

---

E1) $G_f \cap Ox$ în 2 puncte distincte $\Leftrightarrow \Delta > 0$

E2) $\Delta = 0 \Leftrightarrow (-2m)^2 - 4(m+2) \cdot 1 = 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 8 = 0 \mid :4$

$m^2 - m - 2 = 0$

$m_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} \begin{matrix} 2 \\ -1 \end{matrix}$

E3)

m		-1		2	
m^2-m-2	$+ +$	0	$- - - -$	0	$+ +$

$m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

Dar, $m \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$\Rightarrow m \in (-\infty, -2) \cup (-2, -1) \cup (2, \infty)$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/SH
I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\log_3^2 x - 2\log_3 x - 3 = 0$$

E_1) Cond: $x > 0 \Rightarrow I_C = (0; \infty)$

E_2) notăm $t = \log_3 x \Rightarrow \log_3^2 x = t^2$

$\Rightarrow$ ec. devine $t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{matrix} \nearrow 3 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

E_3) $t_1 = 3 \Rightarrow \log_3 x = 3 \Rightarrow x = 3^3 \Rightarrow x = 27 \in I_C$

$\Rightarrow x = 27$ soluție

$t_2 = -1 \Rightarrow \log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \in I_C$

$\Rightarrow x = \frac{1}{3}$ soluție

E_4) $S_f: x \in \{\frac{1}{3}; 27\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2019/ S41

I/4

Determinați câte numere de 3 cifre distincte se pot forma cu elementele din $M=\{0;1;2;3;4\}$

E_1) $N=\overline{abc}$ cu a,b,c distincte

E_2) $a \to$ 4 var ($\neq 0$)

$b \to$ 4 var ($\neq a$ dar poate fi 0)

$c \to$ 3 var ($\neq a$ și $\neq b$)

a,b,c independente

---

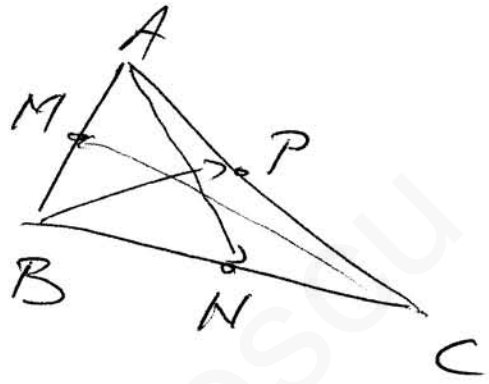
din regula produsului $\Rightarrow 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$ numere

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/S1
I/5

Fie ΔABC și M, N, P mijloacele pt AB, BC respectiv AC.

Arătați că: $\vec{AN} + \vec{BP} + \vec{CM} = \vec{0}$



E_1) M, N, P mijloace de laturi $\Rightarrow \vec{AN}, \vec{BP}, \vec{CM}$ sunt mediane

E_2) $\vec{AN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$

$\vec{BP} = \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{BA})$

$\vec{CM} = \frac{1}{2}(\vec{CB} + \vec{CA})$

E_3] adunând $\Rightarrow \vec{AN} + \vec{BP} + \vec{CM} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{BC} + \vec{BA} + \vec{CB} + \vec{CA}) = \vec{0}$

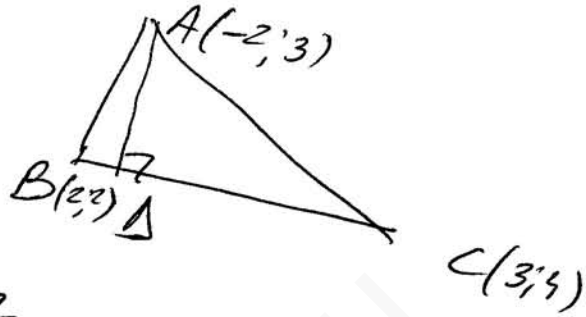
$\Rightarrow \vec{AN} + \vec{BP} + \vec{CM} = \vec{0}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/SH

I/6

Fie ΔABC cu $A(-2;3)$, $B(2;2)$ $C(3;4)$. Găsiți ec. înălțimii din A



$E_1)$ $AD \perp BC \Leftrightarrow m_{AD} \cdot m_{BC} = -1$

$E_2)$ $m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{4-2}{3-2} = 2$

$E_3)$ $m_{AD} \cdot m_{BC} = -1 \Rightarrow m_{AD} \cdot 2 = -1 \Rightarrow m_{AD} = -\frac{1}{2}$

$E_4)$ Știm $A(-2;3)$, știm $m_{AD} = -\frac{1}{2} \Rightarrow$ ec. AD este: $y - y_A = m_{AD}(x - x_A) \Rightarrow$

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x+2) \mid \cdot 2 \Rightarrow 2y - 6 = -x - 2$$

$$\Rightarrow \boxed{x + 2y - 4 = 0}$$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2019/S1

Fie $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+m^2y-z=0 \\ -2x-3y+3z=m-1 \end{cases}$

Calculati $\det A$

E1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & m^2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3m^2+2+6-$

$-2m^2-3-6$

$= m^2-1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Matematică
Sl 15)

Fie $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + m^2 y - z = 0 \\ -2x - 3y + 3z = m - 1 \end{cases}$

Găsiți $m \in \mathbb{R}$ dacă sistemul este compatibil nedeterminat

E_1) sist. compatibil nedeterminat $\Leftrightarrow$ (det $A = 0$, și toți $\Delta_c = 0$ sau $\nexists \Delta_c$)

E_2) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & m^2 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 3m^2 + 6 + 2 - 2m^2 - 6 - 3 =$

$= m^2 - 1$

E_3) $\det A = 0 \Leftrightarrow m \in \{\pm 1\}$

E_4) $m = 1 \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ -2x - 3y + 3z = 0 \end{cases}$

$\det S = 0$, rang $A = ?$, $|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A \geq 1$, bordăm $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\Rightarrow$ rang $A \geq 2$, bordăm $\Rightarrow \det S = 0 \Rightarrow$ rang $A = 2$; $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$.

$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ sist compatibil nedeterminat

E_5) $m = -1 \Rightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ -2x - 3y + 3z = -2 \end{cases}$

$\det S = 0$, rang $A = ?$, $|1| = 1 \neq 0 \Rightarrow$ rang $A \geq 1$, bordăm $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

$\Rightarrow$ rang $A \geq 2$, bordăm $\Rightarrow \det S = 0 \Rightarrow$ rang $A = 2$; $\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 0 + 0 - 0 - 0 + 4 = 2 \neq 0 \Rightarrow$ sist incompatibil

E_6) sist compatibil nedeterminat $\Leftrightarrow \boxed{m = 1}$.

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2017/SH

II 1c)

Fie $\begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+m^2y-z=0 \\ -2x-3y+3z=m-1 \end{cases}$, pentru $m=1$

arătați că $E=\dfrac{x_0^2+y_0^2+z_0^2}{x_0^2-2y_0^2+3z_0^2}$ este constantă

pentru orice soluție nebanală (x_0, y_0, z_0) a sistemului

$E_1)$ $m=1 \Rightarrow \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+y-z=0 \\ -2x-3y+3z=0 \end{cases}$

$E_2)$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix}=3+2+6-2-3-6=0$

E_3) calculăm rang $A=?$

$|1|=1\neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A\geq 1$, bordăm $\Rightarrow$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0 \Rightarrow \operatorname{rang} A\geq 2$, bordăm $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 3 \end{vmatrix}=\det A=0$, nu există alt minor de ordin 3 obținut prin bordare $\Rightarrow \operatorname{rang} A=2$,

$\Delta_p=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, $\Delta_c=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0$ și $\nexists$ alt Δ_c

$\Rightarrow$ sist compatibil nedeterminat

E_4) sist $\equiv \begin{cases} x+y=\alpha \\ 2x+y=\alpha \end{cases}$, $z=\alpha$

$(-1)\cdot$; $-x=0 \Rightarrow x=0$, înlocuim $\Rightarrow y=\alpha \Rightarrow (0;\alpha;\alpha)$ sol.

$E_5)$ $E=\dfrac{x_0^2+y_0^2+z_0^2}{x_0^2-2y_0^2+3z_0^2}=\dfrac{0^2+\alpha^2+\alpha^2}{0^2-2\alpha^2+3\alpha^2}=\dfrac{2\alpha^2}{\alpha^2}=2$ constantă

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $G=\left\{A(a)=\begin{pmatrix}1-2a & a\\ -6a & 1+3a\end{pmatrix} \mid a\in(-1,\infty)\right\}$ (II 2a)

Arătați că G este parte stabilă a lui $M_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricilor

---

$E_1)\ \forall A(a), A(b)\in G \overset{(?)}{\Longrightarrow} A(a)\cdot A(b)\in G$

$E_2)\ A(a)A(b)=\begin{pmatrix}1-2a & a\\ -6a & 1+3a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-2b & b\\ -6b & 1+3b\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}(1-2a)(1-2b)-6ab & (1-2a)b+a(1+3b)\\ -6a(1-2b)-(1+3a)6b & -6ab+(1+3a)(1+3b)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1-2b-2a+4ab-6ab & b-2ab+a+3ab\\ -6a+12ab-6b-18ab & -6ab+1+3b+3a+9ab\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-2(a+b+ab) & a+b+ab\\ -6(a+b+ab) & 1+3(a+b+ab)\end{pmatrix}=A(a+b+ab)$$

$E_3)$ mai rămâne de arătat că $\forall a>-1, b>-1$ rezultă că $a+b+ab>-1$

$a>-1\Rightarrow a+1>0$

$b>-1\Rightarrow b+1>0$

$(a+1)(b+1)>0\Rightarrow ab+a+b+1>0\Rightarrow$

$\Rightarrow ab+a+b>-1$

$\Rightarrow \forall A(a), A(b)\in G\Rightarrow A(a)A(b)\in G$ unde

$A(a)A(b)=A(a+b+ab)$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2019/SH
II 2 b)

Fie $G=\left\{A(a)=\begin{pmatrix}1-2a & a\\ -6a & 1+3a\end{pmatrix}, a\in(-1,\infty)\right\}$

Se știe că $A(a)A(b)=A(a+b+ab)$ și că G este parte stabilă a lui $(M_2(\mathbb{R}),\cdot)$

Arătați că $(G,\cdot)$ grup abelian

$E_1)$ <u>lege internă pe G</u>:

$\forall A(a),A(b)\in G \overset{(?)}{\Rightarrow} A(a)A(b)\in G$ adev din ipoteză

$E_2)$ <u>comutat pe G</u>:

$\forall A(a),A(b)\in G \overset{(?)}{\Rightarrow} A(a)A(b)=A(b)A(a)$

$A(a)A(b)=A(a+b+ab)$ $\Rightarrow$ egalitate

$A(b)A(a)=A(b+a+ba)$

$E_3)$ <u>asociat pe G</u>:

$\forall A(a),A(b),A(c)\in G \overset{(?)}{\Rightarrow} (A(a)A(b))A(c)=A(a)(A(b)A(c))$

Deoarece $\cdot$ matricilor asociat în caz general $\Rightarrow$ este asociat și pe G

$E_4)$ <u>are el neutru pe G</u>:

$\exists A(e)\in G$ a.î. $\forall A(a)\in G$ să avem: $A(a)A(e)=A(e)A(a)=A(a)$

din $A(a)A(e)=A(a)\Rightarrow A(a+e+ae)=A(a)\Rightarrow a+e+ae=a$

$\Rightarrow e(a+1)=0, \forall a>-1\Rightarrow e=0\in G$. Deoarece $\cdot$ matr comut pe G

$\Rightarrow A(a)A(e)=A(e)A(a)\Rightarrow A(0)$ el neutru pe G

$E_5)$ <u>toate elem. sunt simetrizabile pe G</u>

$\forall A(a)\in G, \exists A(a')\in G$ cu $A(a)A(a')=A(a')A(a)=A(e)$

$A(a)A(a')=A(e)\Rightarrow A(a+a'+aa')=A(0)\Rightarrow$

$\Rightarrow a+a'+aa'=0\Rightarrow a'(a+1)=-a$. Cum $a>-1\Rightarrow a'=-\frac{a}{a+1}$

rămâne să arăt că $a'>-1 \Leftrightarrow -\frac{a}{a+1}>-1 \Leftrightarrow \frac{a+1}{a+1}>0$ adev

$\Rightarrow a'\in G$. Cum $\cdot$ comut pe $G\Rightarrow A(a)A(a')=A(a')A(a)\Rightarrow$

$\Rightarrow A(a')=A\left(-\frac{a}{1+a}\right)$ este simetricul lui $A(a)$, $\forall A(a)\in G\Rightarrow$ grup abelian

Prof. Ovidiu Băgoscu

M1/2017/SH

II 2 c)

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 1-2a & a \\ -6a & 1+3a \end{pmatrix}$, să se arate că $A(a)A(b)=A(a+b+ab)$, calculați $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}^{2017}$

E_1) observăm că $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}=A(1)$, deci trebuie calculat $(A(1))^{2017}$

E_2) din ip, $A(a)A(b)=A(a+b+ab)$ și folosim forma restrânsă: $a+b+ab=a(1+b)+(b+1)-1=$

$=(a+1)(b+1)-1$ (*)

E_3) Deducem că $A(x_1)A(x_2)\cdots A(x_n)=A((x_1+1)(x_2+1)\cdots(x_n+1)-1)$

și arătăm prin inducție, $\forall n\geq 2$

I $P(2)$: $A(x_1)A(x_2)=A((x_1+1)(x_2+1)-1)$ adev din (*)

II Fie $P(k)$ adev $\overset{(?)}{\Longrightarrow} P(k+1)$ adev unde

$P(k)$: $A(x_1)\cdots A(x_k)=A((x_1+1)\cdots(x_k+1)-1)$

$P(k+1)$: $A(x_1)\cdots A(x_{k+1})=A((x_1+1)\cdots(x_{k+1}+1)-1)$

Știm că $P(k)$ adev $\Rightarrow$

$A(x_1)\cdots A(x_k)=A((x_1+1)\cdots(x_k+1)-1) \;/\cdot A(x_{k+1})$

$\Rightarrow A(x_1)\cdots A(x_{k+1})=A((x_1+1)\cdots(x_k+1)-1)\,A(x_{k+1}) \overset{(*)}{=}$

$=A(((x_1+1)\cdots(x_k+1)-1+1)(x_{k+1}+1))=$

$=A((x_1+1)\cdots(x_k+1)(x_{k+1}+1))\Rightarrow P(k+1)$ adev

$\Rightarrow P(n)$ adev., $\forall n\geq 2 \Rightarrow (A(1))^{2017}=A(\underbrace{(1+1)(1+1)\cdots(1+1)}_{2017}-1)=$

$=A(2^{2017}-1)$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2021/SII
II 1 a)

Fie $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(x+1)$

Arătați că $x\geq\ln(x+1)$, $\forall x\in(-1;\infty)$

E_1) Facem tabel de variație pt f

E_2) $f'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$

E_3) $f'(x)=0 \iff x=0\in D_f$

E_4)

x	$(-1$		0	
f'	$\|\|$	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$
f	$\|\|$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$f(-\frac{1}{2})=\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}+1}=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=-1<0\Rightarrow f'(x)<0$ pe $(-1;0)\Rightarrow$

$\Rightarrow f\searrow$ pe $(-1;0]$

$f'(1)=\frac{1}{2}>0\Rightarrow f'(x)>0$ pe $(0;\infty)\Rightarrow$

$\Rightarrow f\nearrow$ pe $[0;\infty)$

E_5) $f(0)=0-\ln 1=0$

E_6) din tabelul de variație $\Rightarrow f(x)\geq 0$, $\forall x\in(-1;\infty)$

$\Rightarrow x-\ln(x+1)\geq 0$, $\forall x\in(-1;\infty)$

$\Rightarrow x\geq\ln(x+1)$, $\forall x\in(-1;\infty)$

Obs: mergea și cu $x\geq\ln(x+1)\iff x-\ln(x+1)\geq 0$

și de aici ideea alegerii funcției $f(x)=x-\ln(x+1)$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/SH

Fie $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$ $f(x)=x-\ln(x+1)$ III 16)

Determinați asimptotele la G_f

E_1) as. orizontale: spre ∞

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(x-\ln(x+1)) \overset{\infty-\infty}{=\!=}$$

$$=\lim_{x\to\infty} x\left(1-\frac{\ln(x+1)}{x}\right)=\lim_{x\to\infty} x\left(1-\frac{\ln(x+1)}{x+1}\cdot\frac{x+1}{x}\right)$$

$$\overset{\infty(1-0\cdot 1)}{=\!=} \infty \Rightarrow G_f \text{ nu are as. oriz spre } \infty$$

$\not$ s-a folosit $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ $\not$?

E_2) as. oblice: spre ∞

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{\ln(x+1)}{x}\right)$$

Fie $l_1=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+1)}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{l'H}{=}} \lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1} \overset{\frac{1}{\infty}}{=\!=} 0\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{m=1}$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}(x-\ln(x+1)-x)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}(-\ln(x+1))=-\infty\notin\mathbb{R}\Rightarrow G_f \text{ nu are as. oblice spre } \infty$$

E_3) as. verticale: deoarece $D_f=(-1,\infty)$, calculăm

$$\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-1\\x>-1}}(x-\ln(x+1))\frac{-1-\ln 0_+}{-1-(-\infty)}\infty \Rightarrow x=-1 \text{ as. vert la dr.}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017/S11
III 1c)

Fie $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln(x+1)$ și $(x_n)_{n\geq 0}$ dat de $x_0>0$ și $x_{n+1}=f(x_n)$.

Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ știind că $x\geq \ln(x+1), \forall x\in(-1;\infty)$

$E_1)$ $x_{n+1}=f(x_n) \Rightarrow \boxed{x_{n+1}=x_n-\ln(x_n+1)}$ (1)

Cum $x\geq \ln(x+1), \forall x\in(-1;\infty)$ și cum $x_n\in(-1;\infty)$ știm că altfel nu ar exista $\ln(x_n+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n\geq \ln(x_n+1) \Rightarrow x_n-\ln(x_n+1)\geq 0 \Rightarrow x_{n+1}\geq 0$

$\Rightarrow \boxed{x_n\geq 0}, n\in\mathbb{N}^*$

$E_2)$ din $x_{n+1}=x_n-\ln(x_n+1) \Rightarrow x_{n+1}-x_n=-\ln(x_n+1)$

din $x_n\geq 0 \Rightarrow x_n+1\geq 1 \Rightarrow \ln(x_n+1)\geq \ln 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln(x_n+1)\geq 0 \Rightarrow -\ln(x_n+1)\leq 0 \Rightarrow x_{n+1}-x_n\leq 0$

$\Rightarrow x_{n+1}\leq x_n \Rightarrow \boxed{x_n\searrow} \Rightarrow x_n$ are limită

$E_3)$ din $x_n\geq 0, x_n\searrow \Rightarrow x_n\in[0;x_0] \Rightarrow x_n$ este monot și mărg $\Rightarrow x_n$ are limită finită $l\in\mathbb{R}$

$E_4)$ trecem la limită în relația de recurență (1)

$\Rightarrow l=l-\ln(l+1)$, cum l finit

$\Rightarrow 0=-\ln(l+1) \Rightarrow \ln(l+1)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow l+1=e^0 \Rightarrow l+1=1 \Rightarrow \boxed{l=0}$

Așadar, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2021/SH
II/2 a)

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^2} dx$, calculați I_0

$\in_1) I_0 = \int_0^1 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int_0^1 (x+1)^{-2} dx =$

$= \frac{(x+1)^{-2+1}}{-2+1} \cdot \frac{1}{1} \Big|_0^1 = -\frac{1}{x+1} \Big|_0^1 =$

$= -\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^2}\,dx$, arătați că M1/2017/SH III 25)

$$I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$$

E1) $I_{n+2} + 2I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(x+1)^2}\,dx + 2\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(x+1)^2}\,dx$

$$+ \int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 2x^{n+1} + x^n}{(x+1)^2}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(x^2+2x+1)}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} - 0$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1 Bacalaureat

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(x+1)^2} dx$, demonstrați III 2c)

că $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$

$E_1)$ $x \in [0;1] \Rightarrow 0 \leq \frac{x^n}{(x+1)^2} \leq x^n \Big| \int_0^1 \dots dx$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1 \Rightarrow$$

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} - 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$E_2)$ Folosind criteriul cleștelui

$$\Rightarrow \lim_n I_n = 0$$

Prof. Ovidiu Bădescu