Examenul de bacalaureat național 2017
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numerele complexe $z_1 = 2+3i$ și $z_2 = 4-6i$. Arătați că numărul $z_1 z_2 + 2z_1 + z_2$ este real.

5p **2.** Calculați $(f \circ g)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-1$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+x+1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x^2-4)=\log_5(5x-8)$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 7.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuație $y=3x-2017$ și punctul $A(1,0)$. Determinați ecuația paralelei duse prin punctul A la dreapta d.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin x+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0\\ 0 & x & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x\\ 0 & x & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(2))$.

5p **b)** Demonstrați că $\det(A(x)+B(x))=\det(B(x))$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numerele naturale n și p, știind că $A(n)B(p)=B(3)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3+aX^2+8X+3$, unde a este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real a, știind că $f(1)=0$.

5p **b)** Pentru $a=6$, determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul X^2+5X+3.

5p **c)** Demonstrați că, dacă $a\in(-4,4)$, atunci polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2018}+2018x+2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=2018\left(x^{2017}+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(a,2020)$ aparține tangentei la graficul funcției f care trece prin punctul de abscisă $x=0$ situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are exact două soluții reale distincte.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+2}\,dx$.

5p **a)** Calculați $\int_0^1 \left(x^2+2x+2\right)dx$.

5p **b)** Demonstrați că $I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}=\frac{1}{n}$, pentru orice număr natural n, $n\geq 2$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n=\frac{1}{5}$.

M1/201
VM/I/1

Fie $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 4-6i$.

Arătați că $z_1 z_2 + 2z_1 + z_2$ este real

E1) $z_1 \cdot z_2 + 2z_1 + z_2 = (2+3i)(4-6i) + 2(2+3i) + (4-6i) =$

$= 8 - 12i + 12i - 18i^2 + 4 + 6i + 4 - 6i =$

$= 8 + 18 + 8 = 34 \in \mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017
VM/I/2

Calculați $(f \circ g)(0)$ dacă $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$f(x) = 2x - 1$, $g(x) = x^2 + x + 1$

E1) $(f \circ g)(0) = f(g(0)) = f(1) = 2 - 1 = 1$

$\Rightarrow (f \circ g)(0) = 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

M11/2017
VM/I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$\log_5(x^2-4)=\log_5(5x-8)$$

E_1) deoarece $f(x)=\log_5 x$ e injectivă $\Rightarrow$ ec. devine

$$x^2-4=5x-8 \Leftrightarrow$$

$$x^2-5x+4=0$$

$$\Rightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2\cdot 1}=\frac{5\pm 3}{2}\begin{matrix}\nearrow 4\\ \searrow 1\end{matrix}$$ soluții posibile

E_2) aceste soluții posibile le verificăm în ec. inițială

$x_1=4 \Rightarrow \log_5(16-4)=\log_5(20-8)$

$\Leftrightarrow \log_5 12=\log_5 12$ adev

$\Rightarrow x_1=4$ soluție

$x_2=1 \Rightarrow \log_5(1-4)=\log_5(5-8)$

$\Leftrightarrow \log_5(-3)=\log_5(-3)$ fals deoarece nu există $\log_b x$ cu $x<0$

$\Rightarrow x_2=1$ nu e soluție

$S_f: x=4$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017

Calculați probabilitatea ca alegând un număr de 2 cifre, acesta să fie multiplu de 7. VM/I/4

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile: toate numerele de 2 cifre de forma

$\overline{ab} \Rightarrow$ a are 9 v
b are 10 v
independ $\Rightarrow 9 \cdot 10 = 90$ numere

$E_3)$ nr. caz favorabile: toate nr. de 2 cifre $\vdots 7$

$\Rightarrow 14; 21; \dots; 98 \Rightarrow$ ele sunt în progr aritm

cu $a_1 = 14$, $a_n = 98$ și $r = 7$

Folosim $a_n = a_1 + (n-1)r$

$\Rightarrow 98 = 14 + (n-1) \cdot 7 \mid :7$

$14 = 2 + n - 1 \Rightarrow n = 13$

$\Rightarrow$ sunt 13 cazuri favorabile

$E_4)$ $P = \dfrac{13}{90}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017
VM/I/5

Fie d de ecuație $y=3x-17$ și $A(1;0)$

Găsiți ec. paralelei prin A la d

E_1) Fie $d' \parallel d$, $A \in d'$ dreapta cerută

E_2) $d' \parallel d \Rightarrow m_{d'} = m_d$



E_3) $d: y=3x-17 \Rightarrow m_d = 3$

$\Rightarrow \boxed{m_{d'}=3}$

E_4) ec. d': $y-y_A = m_{d'}(x-x_A) \Rightarrow y-0=3(x-1)$

$\Rightarrow y=3x-3 \Rightarrow \boxed{3x-y-3=0}$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2017

VM/I/6

Arătați că:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin x+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

E1) met I (muncitorească)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin x+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x=$$

$$=\left(\sin\frac{\pi}{2}\cos x+\cos\frac{\pi}{2}\sin x\right)\sin x+\left(\cos\frac{\pi}{2}\cos x-\sin\frac{\pi}{2}\sin x\right)\cos x=$$

$$=(1\cdot\cos x+0)\sin x+(0\cdot\cos x-\sin x)\cos x=$$

$$=\cos x\sin x-\sin x\cos x=0$$

E2) met II (ai oameni deștepți)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin x+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos x+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin x=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+x-x\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$$

Ex s-a folosit: $\cos a\cos b+\sin a\sin b=\cos(a-b)$

Prof. Ovidiu Băgosu

M1/2017

VM/II 1a)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

calculați $\det(A(2))$

E1) $\det(A(2))=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4+0+0-0-0-0=4$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ | M1/2017 VM/II/16)

Arătați că $\det(A(x)+B(x))=\det(B(x))$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$E_1)$ $A(x)+B(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 2x & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $\det(A(x)+B(x))=\begin{vmatrix} x & 0 & x \\ 0 & 2x & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2x^2+0+0-4x^2-0-0$

$=2x^2-4x^2=-2x^2$ (1)

$E_3)$ $\det B(x)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0+0+0-2x^2-0-0$

$=-2x^2$ (2)

$E_4)$ din (1) și (2) $\Rightarrow \det(A(x)+B(x))=\det(B(x))$, $\forall x\in\mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2014

VM/II 1c)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Găsiți $n, p \in \mathbb{N}$ dacă $A(n) \cdot B(p) = B(3)$

$E_1)$ $A(n) \cdot B(p) = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & p \\ 0 & p & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & np \\ 0 & np & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $B(3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E_3)$ $A(n)B(p) = B(3) \Rightarrow np = 3$

$E_4)$ $\left.\begin{array}{l} n, p \in \mathbb{N} \\ np = 3 \\ 3 \text{ nr prim} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} n=1 \text{ și } p=3 \\ \text{sau} \\ n=3 \text{ și } p=1 \end{array}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017
VM/II/2a

Fie $f = X^3 + aX^2 + 8X + 3$

Găsiți $a \in \mathbb{R}$ dacă $f(1) = 0$

E1) $f(1) = 0 \Rightarrow 1 + a + 8 + 3 = 0$

$\Rightarrow a + 12 = 0 \Rightarrow \boxed{a = -12}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017
VM/II/26

Fie $f = X^3 + 9X^2 + 8X + 3$, pentru $a = 6$
găsiți câtul și restul lui $f : (X^2 + 5X + 3)$

$E_1)$ $X^3 + 6X^2 + 8X + 3 \;\big|\; X^2 + 5X + 3$

$-X^3 - 5X^2 - 3X \qquad X + 1$

$\backslash \qquad x^2 + 5x + 3$

$\qquad -x^2 - 5x - 3$

$\qquad \backslash \quad \backslash \quad \backslash$

$E_2)$ câtul $C(x) = X + 1$

restul $R(x) = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017
VM/II/2c)

Fie $f = X^3 + aX^2 + 8X + 3$, $a \in \mathbb{R}$.

Arătați că dacă $a \in (-4; 4)$, atunci f NU are toate rădăcinile reale

---

E_1) încercăm să folosim:
„dacă $S_1^2 - 2S_2 < 0$, atunci f nu are toate rădăc. reale.
dacă $S_1^2 - 2S_2 \geq 0$, căutăm altă metodă"

E_2) $S_1 = -\frac{a}{1} = -a$

$S_2 = \frac{8}{1} = 8$

E_3) $S_1^2 - 2S_2 = a^2 - 16$

E_4) cum $a \in (-4; 4) \Rightarrow a^2 \in (0; 16) \Rightarrow a^2 - 16 < 0$

$\Rightarrow S_1^2 - 2S_2 < 0 \Rightarrow f$ nu are toate rād. reale

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017

VM/III/1/a)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2018}+2018x+2$

Arătați că $f'(x)=2018(x^{2017}+1)$

E,) $f'(x)=2018x^{2017}+2018\cdot 1+0$

$f'(x)=2018(x^{2017}+1)$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017

VM/III 1/6)

Fie $f(x)=x^{2018}+2018x+2$

Găsiți $a\in\mathbb{R}$ dacă $A(a,2020)$ este pe tangenta la G_f care trece prin punctul de abscisă $x=0$

E_1) ec. tg la G_f în $x=\alpha$ este

$$y-f(\alpha)=f'(\alpha)(x-\alpha)$$

$\Rightarrow$ ec. tg la G_f în $x=0$ este

$$y-f(0)=f'(0)(x-0)$$

E_2) $f(0)=0+0+2\Rightarrow f(0)=2$

$f'(x)=2018x^{2017}+2018\Rightarrow f'(0)=2018$

E_3) ec. tg în $x=0$ este: $y-2=2018x$

$$\Rightarrow y=2018x+2$$

E_4) $A(a,2020)\in tg \Rightarrow 2020=2018\cdot a+2$

$$\Rightarrow 2018=2018a$$

$$\Rightarrow a=1$$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2017
VM/III/1c)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^{2018}+2018x+2$

Arătați că ec. $f(x)=0$ are exact două soluții reale distincte

---

E1) Folosim șirul lui Rolle:

$f'(x)=2018x^{2017}+2018$

$f'(x)=0 \Rightarrow 2018(x^{2017}+1)=0 \Rightarrow x^{2017}=-1$

$\Rightarrow x=-1$

E2)

x	$-\infty$		-1		∞
f'			0		
f	∞		-2015		∞

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^{2018}+2018x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^{2018}\left(1+\frac{2018}{x^{2017}}+\frac{2}{x^{2018}}\right)$

$\underline{\underline{\infty(1+0+0)}}\ \infty$

$f(-1)=1-2018+2=-2015$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(x^{2018}+2018x+2)=\lim\limits_{x\to\infty} x^{2018}\left(1+\frac{2018}{x^{2017}}+\frac{2}{x^{2018}}\right)=$

$\underline{\underline{\infty(1+0+0)}}\ \infty$

E3) Șirul lui Rolle este: $(+;-;+)$

$\Rightarrow f(x)=0$ are exact două soluții reale distincte

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017

Calculați: $\int_0^1 (x^2+2x+2)\,dx$ VM/III/2a)

E1) $I = \int_0^1 (x^2+2x+2)dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 2x\Big|_0^1 =$

$= \frac{1}{3}(1-0) + (1-0) + 2(1-0)$

$= \frac{1}{3} + 3 = \frac{10}{3}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2017
VM/IV/26)

Fie $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+2}\,dx$

Arătați că $I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}=\frac{1}{n}$, $\forall n\geq 2$

E1) $I_{n+1}+2I_n+2I_{n-1}=\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+2x+2}dx+2\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+2}dx+$

$+2\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{x^2+2x+2}dx$

$=\int_0^1 \frac{x^{n-1}(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}dx=$

$=\int_0^1 x^{n-1}dx=\frac{x^n}{n}\Big|_0^1=\frac{1}{n}-\frac{0}{n}=\frac{1}{n}$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2017

VM/III/2 e)

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+2}\,dx$,

Știind că $I_{n+1} + 2I_n + 2I_{n-1} = \frac{1}{n}, \forall n \geq 2$,

arătați că $\lim_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{5}$

E1) Studiem monot. lui I_n:

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+2x+2}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+2x+2}\,dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{x^2+2x+2}\,dx$$

Dar, $x \in [0,1] \Rightarrow \begin{cases} x^n \geq 0 \\ x-1 \leq 0 \\ x^2+2x+2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x^n(x-1)}{x^2+2x+2} \leq 0$

$\Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n \Rightarrow I_n \searrow$

E2) $I_{n+1} \leq I_n \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n \leq I_{n-1}$

$\Rightarrow 5I_{n+1} \leq I_{n+1} + 2I_n + 2I_{n-1} \leq 5I_{n-1} \overset{+}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow 5I_{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq 5I_{n-1} \Rightarrow \begin{cases} I_{n+1} \leq \frac{1}{5n} \\ I_{n-1} \geq \frac{1}{5n} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} I_n \leq \frac{1}{5(n-1)} \\ I_n \geq \frac{1}{5(n+1)} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{5(n-1)} \leq I_n \leq \frac{1}{5(n+1)} \mid \cdot n$

$\Rightarrow \frac{n}{5n-5} \leq nI_n \leq \frac{n}{5n+5} \Rightarrow nI_n \to \frac{1}{5}$

$\to \frac{1}{5}$ $\quad$ $\frac{1}{5}$ ✓

Prof. Ovidiu Bădescu