Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_3=5$ și $b_4=10$.

5p **2.** Determinați valoarea maximă a funcției $f:[1,5]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-3$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+12}=x+2$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3,4)$ și $B(1,0)$. Determinați ecuația dreptei AB.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care $AB=6$ și $C=\frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+x & -x\\ 2x & 1-2x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x, $x\neq 1$, pentru care matricea $A(x)$ este egală cu inversa ei.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=2xy-6x-6y+21$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $1\circ 2\circ 3\circ 4=3$.

5p **c)** Determinați numerele reale x, pentru care $x\circ x\circ x=x$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $\ln x\leq x-1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1\left(x^2+1\right)f(x)\,dx=1$.

5p **b)** Demonstrați că $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx=1-\frac{\pi}{4}$.

5p **c)** Determinați numerele naturale n, știind că $\int_n^{n+1}2xf(x)\,dx=\ln 2$.

V 9
I/1

Dacă b_n p.g. și $b_3 = 5, b_4 = 10$, să se $q = ?$

$E_1)$ $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

$E_2)$ $\begin{cases} b_3 = 5 \Rightarrow b_1 q^2 = 5 \\ b_4 = 10 \Rightarrow b_1 q^3 = 10 \end{cases}$

„:": $\frac{1}{q} = \frac{5}{10} \Rightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{q = 2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

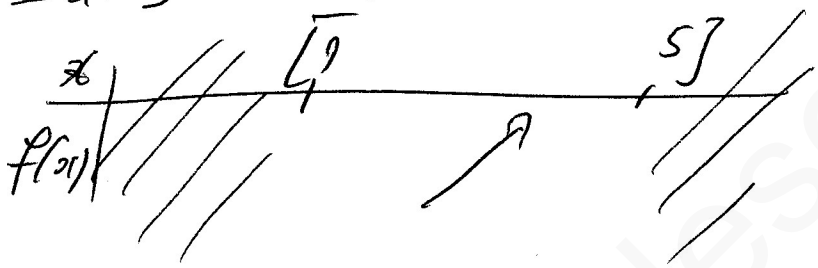
Fie $f:[1;5] \to \mathbb{R}$, $f(x)=x-3$

Se cere valoarea maximă a lui f

E_1) deoarece $f(x)=ax+b$ este $s\nearrow$ dacă $a>0$

$\Rightarrow f(x)=x-3$ este $s\nearrow$

E_2)



$\Rightarrow \max f(x) = f(5) \Rightarrow \max f(x) = 2$

Prof. Ovidiu Badescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x^2+12} = x+2$$

E_1) $\sqrt{x^2+12} = x+2 \mid ()^2 \Rightarrow x^2+12 = x^2+4x+4$

$\Rightarrow 4x = 8 \Rightarrow x = 2$ sol posibilă

E_2 / o verificăm $\Rightarrow \sqrt{4+12} = 2+2$

$\Leftrightarrow \sqrt{16} = 4$ adev $\Rightarrow x = 2$ soluție

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți numărul submulțimilor cu două elemente ale lui $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$

E_1) sunt sm. neordonate

$$\Rightarrow C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{2! \cdot 5!} = 21$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți ec. dreptei AB unde $A(3;4)$, $B(1;0)$

$E_1)$ ec AB: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$

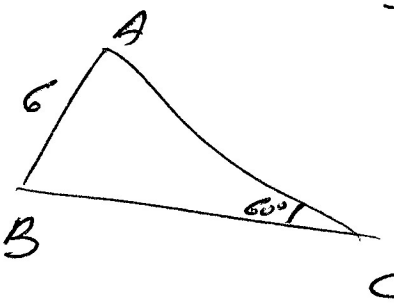
$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4x + y + 0 - 4 - 3y - 0 = 0$

$\Leftrightarrow 4x - 2y - 4 = 0 \mid :2$

$2x - y - 2 = 0$

Prof. Ovidiu Băgescu

Calculați R dacă $AB=6$, $C=\frac{\pi}{3}$



E,) din T. sinusurilor

$$\Rightarrow \frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{6}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$

$$\Rightarrow 6 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2R \Rightarrow \frac{12\sqrt{3}}{3} = 2R \Rightarrow 4\sqrt{3} = 2R$$

$$\Rightarrow \boxed{R = 2\sqrt{3}}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1+x & -x \\ 2x & 1-2x \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$ cu $\det(A(0))=1$ V9 I 19)

$\in$) $\det A(0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1-0=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1+x & -x \\ 2x & 1-2x \end{pmatrix}$

Sa se arate $A(x)\,A(y)=A(x+y-xy)$

$E_1)\ A(x)\,A(y)=\begin{pmatrix} 1+x & -x \\ 2x & 1-2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+y & -y \\ 2y & 1-2y \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} (1+x)(1+y)-2xy & -y(1+x)-x(1-2y) \\ 2x(1+y)+2y(1-2x) & -2xy+(1-2x)(1-2y) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1+x+y-xy & -y-x+xy \\ 2x+2y-2xy & 1-2x-2y+2xy \end{pmatrix}$ (1)

$E_2)\ A(x+y-xy)=\begin{pmatrix} 1+x+y-xy & -x-y+xy \\ 2(x+y-xy) & 1-2x-2y+2xy \end{pmatrix}$ (2)

$E_3)$ din (1)+(2) $\Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1+x & -x \\ 2x & 1-2x \end{pmatrix}$, găsiți x, $x\neq 1$

dacă $A(x)=A^{-1}(x)$.

Se știe că $A(x)A(y)=A(x+y-xy)$

E_1) deoarece $\det A(x)=\begin{vmatrix} 1+x & -x \\ 2x & 1-2x \end{vmatrix}=(1+x)(1-2x)+2x^2=$

$=1-2x+x-2x^2+2x^2=1-x$, $x\neq 1$ (în $\mathbb{R}$)

$\Rightarrow \det A(x)\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}(x)$

E_2) $A^t=\begin{pmatrix} 1+x & 2x \\ -x & 1-2x \end{pmatrix}$

E_3) calc. $A^*\Rightarrow a^*_{11}=(-1)^{1+1}\cdot|1-2x|=1-2x$

$a^*_{12}=(-1)^{1+2}\cdot|-x|=x$; $a^*_{21}=(-1)^{2+1}\cdot|2x|=-2x$

$a^*_{22}=(-1)^{2+2}\cdot|1+x|=1+x$

unde $|m|$ este determinant de m, nu modul de m

E_4) $A^*=\begin{pmatrix} 1-2x & x \\ -2x & 1+x \end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{1-x}\begin{pmatrix} 1-2x & x \\ -2x & 1+x \end{pmatrix}$

E_5) $A=A^{-1}\rightarrow$

$$\begin{cases} 1+x=\frac{1-2x}{1-x}\rightarrow 1-x^2=1-2x\rightarrow x\in\{0;2\} \\ -x=\frac{x}{1-x}\rightarrow -x+x^2=x\rightarrow x\in\{0;2\} \\ 2x=\frac{-2x}{1-x}\rightarrow 2x-2x^2=-2x\rightarrow x\in\{0;2\} \\ 1-2x=\frac{1+x}{1-x}\rightarrow 1-3x+2x^2=1+x\rightarrow x\in\{0;2\} \end{cases}$$

Deoarece $x=0$ sau $x=2$ verifică relațiile $\rightarrow \boxed{S: x\in\{0;2\}}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$, x real

$$x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3$$

E1) Calculăm $2(x-3)(y-3)+3 =$

$= 2(xy - 3y - 3x + 9) + 3 = 2xy - 6x - 6y + 18 + 3 =$

$= 2xy - 6x - 6y + 21$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$, să se arate că $x \circ y = 2(x-3)(y-3)+3$, și apoi $1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 = 3$

$E_1)$ Calc $1 \circ 2 = 2(1-3)(2-3)+3 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

$E_2)$ $(1 \circ 2) \circ 3 = 7 \circ 3 = 2(7-3)(3-3)+3 = 0+3 = 3$

$E_3)$ $(1 \circ 2 \circ 3) \circ 4 = 3 \circ 4 = 2(3-3)(4-3)+3 = 0+3 = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$, se știe că $x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3$, găsiți $x \in \mathbb{R}$ dacă

$$x \circ x \circ x = x$$

$E_1)$ $x \circ x \circ x = \left(2(x-3)(x-3)+3\right) \circ x =$

$= \left(2(x-3)^2 + 3\right) \circ x = 2\left(2(x-3)^2 + 3 - 3\right)(x-3) + 3$

$= 2 \cdot 2(x-3)^2 \cdot (x-3) + 3 =$

$= 4(x-3)^3 + 3$

$E_2)$ Se devine: $4(x-3)^3 + 3 = x$

$\Leftrightarrow 4(x-3)^3 = x - 3$

$E_3)$ not $t = x - 3 \Rightarrow 4t^3 = t \Rightarrow 4t^3 - t = 0$

$\Rightarrow t(4t^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow t = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$

$E_4)$ $t_1 = 0$, $x = t + 3 \Rightarrow x_1 = 3$

$t_2 = \frac{1}{2}$, $x = t + 3 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{3}$

$t_3 = -\frac{1}{2}$, $x = t + 3 \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2} + 3 = \frac{5}{3}$

$$x \in \left\{3; \frac{7}{3}; \frac{5}{3}\right\}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V 9

II 10)

Fie $f(x) = x - \ln x$, a cere

$$f'(x) = \frac{x-1}{x}$$

$E_1)$ $f'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln x$

Arătați că f CONVEXĂ pe $(0;\infty)$

$E_1)$ $f'(x)=1-\frac{1}{x}$

$E_2)$ $f''(x)=0-\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}>0,\ \forall x\in(0;\infty)$

$\Rightarrow f$ CONVEXĂ pe $(0;\infty)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = x - \ln x$, $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$

Arătați că $\ln x \leq x-1$, $\forall x \in (0,\infty)$

E_1) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$

E_2) $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1$

E_3)

x	0		1	
f'	‖	$-$	0	$+$
f	‖	$\searrow$	1	$\nearrow$

$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{\frac{1}{2}} = 1 - 2 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ pe $(0,1)$

$\Rightarrow f \searrow$ pe $(0,1)$

$f'(2) = 1 - \frac{1}{2} > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ pe $(1,\infty)$

$\Rightarrow f \nearrow$ pe $(1,\infty)$

$f(1) = 1 - \ln 1 \Rightarrow f(1) = 1$

E_3) din tabelul de variație $\Rightarrow f(x) \geq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - \ln x \geq 1 \Rightarrow x - 1 \geq \ln x$

$\Rightarrow \ln x \leq x - 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, să se arate $\int_0^1 (x^2+1)f(x)dx=1$

$\in_1)$ $I=\int_0^1 (x^2+1)\cdot\frac{1}{x^2+1}\,dx=\int_0^1 1\,dx=$

$=x\Big|_0^1=1-0=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, a cărei $\int_0^1 x^2 \cdot f(x)\,dx = 1-\frac{\pi}{4}$

E_1) $I=\int_0^1 x^2 \cdot \frac{1}{x^2+1}\,dx=\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx=$

$=\int_0^1 \left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = x\Big|_0^1 - \operatorname{arctg}\frac{x}{1}\Big|_0^1 =$

$=(1-0)-(\operatorname{arctg}1-\operatorname{arctg}0)=$

$=1-\frac{\pi}{4}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V 9
Ex 9 (I)

Fie $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$, găsiți $n\in\mathbb{N}$

dacă $\int_n^{n+1} 2x f(x)dx = \ln 2$

$E_1)$ $I=\int_n^{n+1} 2x f(x)dx=\int_n^{n+1}\frac{2x}{x^2+1}dx=$

$=\ln(x^2+1)\Big|_n^{n+1}=\ln((n+1)^2+1)-\ln(n^2+1)=$

$=\ln\frac{n^2+2n+2}{n^2+1}$

$E_2)$ $I=\ln 2$ și cum $f(x)=\ln x$ e inject

$\Rightarrow \frac{n^2+2n+2}{n^2+1}=2\Rightarrow n^2+2n+2=2n^2+2$

$\Rightarrow n^2-2n=0\Rightarrow n(n-2)=0$

$\Rightarrow \begin{cases} n_1=0 \\ \text{sau} \\ n_2=2 \end{cases}$

Prof. Ovidiu Băcescu