Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 8

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Se consideră numărul complex $z=1-i$. Arătați că $z^2=-2i$.

5p **2.** Calculați $(g\circ f)(0)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2016$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-2016$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x^2-3x}=3^{x-4}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3,\ldots,100\}$, acesta să fie pătrat perfect.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,1)$. Determinați ecuația dreptei d, care trece prin punctul A și este paralelă cu dreapta de ecuație $y=3x-2016$.

5p **6.** Determinați aria triunghiului ABC, știind că $AB=6$, $AC=4$ și $A=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=4$.

5p **b)** Demonstrați că $A(1+m)+A(1-m)=2A(1)$, pentru orice număr real m.

5p **c)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=-3xy+9x+9y-24$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-3(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este asociativă.

5p **c)** Determinați numărul real x, pentru care $(x*x)*x=12$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{3\left(x^3-1\right)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)\geq 1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(x^2+3x+3\right)f(x)\,dx=6$.

5p **b)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=3$ are aria egală cu $\ln 7$.

5p **c)** Demonstrați că $\int_{-1}^{0} f'(x)f(x)\,dx=0$.

V8
S1/1

Fie $z = 1 - i$, sa se arate $z^2 = -2i$

E1) $z^2 = (1-i)^2 = 1 - 2i + i^2 = 1 - 2i - 1 =$

$= -2i$

Prof. Ovidiu Bădescu

Se cere $(g \circ f)(0) = ?$ unde $f(x) = x + 2016$

și $g(x) = x - 2016$

$E_1)$ $(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(2016) = 2016 - 2016 = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați: $3^{x^2-3x} = 3^{x-4}$

$3^{x^2-3x} = 3^{x-4}$

$E_1)$ $f(x) = x^2-3x$ inject $\Rightarrow x^2-3x = x-4$

$\Rightarrow x^2-4x+4=0$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați probabilitatea ca alegând un număr din $M=\{1;2;3;\dots;100\}$, acesta să fie pătrat perfect

$E_1)$ $P=\dfrac{\text{nr. caz favor}}{\text{nr. caz posib}}$

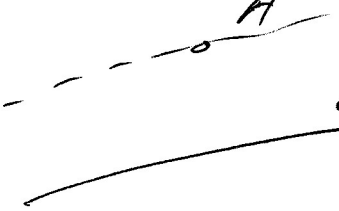
$E_2)$ nr. de caz posib: toate elem din M adică 100

$E_3)$ nr. de caz favorab: pătratele perfecte din M, adică $1^2;\ 2^2;\ 3^2;\ \dots;\ 10^2 \Rightarrow$ 10 elemente

$E_4)$ $P=\dfrac{10}{100}=\dfrac{1}{10}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(0;1)$, să se scrie ec. dreptei d ce trece prin A și este paralelă cu $d: y = 3x - 2016$



E_1) Fie d_1 dreapta cerută

E_2) $d_1 \parallel d \Rightarrow m_{d_1} = m_d$

E_3) $m_d = -\frac{a}{b}$, $d: 3x - y - 2016 = 0 \Rightarrow m_d = -\frac{3}{-1} = 3$

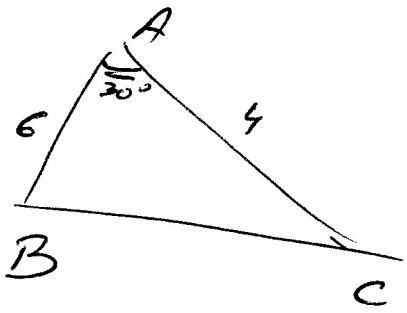
și $m_{d_1} = m_d \Rightarrow m_{d_1} = 3$

E_4) știm $A(0;1)$, $m_{d_1} = 3 \Rightarrow$ ec. d_1:

$$y - 1 = 3(x - 0) \Rightarrow y - 1 = 3x \Rightarrow 3x - y + 1 = 0$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Se cere aria $\triangle ABC$ dacă $AB=6$, $AC=4$ și $A=\frac{\pi}{6}$



E1) $\mathcal{A}=\frac{AB\cdot AC\cdot \sin A}{2}$

$\mathcal{A}=\frac{6\cdot 4\cdot \sin 30^\circ}{2}=12\cdot\frac{1}{2}=6$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$

Arătați că $\det(A(0))=4$

$E_1)\ \det(A(0))=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=2+2=4$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, arătați că

$$A(1+m)+A(1-m)=2A(1),\ \forall m\in\mathbb{R}$$

$E_1)$ $A(1+m)+A(1-m)=\begin{pmatrix} 1+m-1 & -1 \\ 2 & 1+m-2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1-m-1 & -1 \\ 2 & 1-m-2 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} m & -1 \\ 2 & m-1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -m & -1 \\ 2 & -m-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$E_2)$ $2A(1)=2\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(m)=\begin{pmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{pmatrix}$, arătați că

$A(m)$ inversabilă, $\forall m\in\mathbb{R}$

E_1) $A(m)$ inversabilă $\Leftrightarrow \det A(m)\neq 0$

E_2) $\det A(m)=\begin{vmatrix} m-1 & -1 \\ 2 & m-2 \end{vmatrix}=(m-1)(m-2)+2=$

$=m^2-3m+2+2=m^2-3m+4$

E_3) dacă $m^2-3m+4=0$, $m_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-12}}{2\cdot 1}\Rightarrow \Delta<0$

$\Rightarrow \nexists m$ din $\mathbb{R}$ a.î. $\det M=0$

$\Rightarrow \det M\neq 0, \forall m\in\mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x * y = -3xy + 9x + 9y - 24$

Se cere $x * y = -3(x-3)(y-3)+3$

$E_1)$ calculăm $-3(x-3)(y-3)+3 = -3(xy-3x-3y+9)+3 =$

$= -3xy + 9x + 9y - 24 = x * y$

$E_2) \Rightarrow x * y = -3(x-3)(y-3)+3$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x*y=-3xy+9x+9y-24$, $*$ cea $*$ asociativă

Știind că $x*y=-3(x-3)(y-3)+3$ (1)

E_1) arăt. că $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$ avem $(x*y)*z=x*(y*z)$

E_2) $(x*y)*z=\underbrace{\left(-3(x-3)(y-3)+3\right)}_{x}*\underbrace{z}_{z}=$

$=-3\left(-3(x-3)(y-3)+3-3\right)(z-3)+3=$

$=-3(-3(x-3)(y-3))(z-3)+3=\boxed{9(x-3)(y-3)(z-3)+3}$ (2)

E_3) $x*(y*z)=\underbrace{x}_{x}*\underbrace{\left(-3(y-3)(z-3)+3\right)}_{y}=$

$=-3\left((x-3)\left(-3(y-3)(z-3)+3-3\right)\right)+3=\boxed{9(x-3)(y-3)(z-3)+3}$ (3)

E_4) Din (2)+(3) $\Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Băcescu

Fie $x * y = -3xy + 9x + 9y - 24$, să se arate că

$x * y = -3(x-3)(y-3) + 3$, să se afle $x = ?$ dacă

$$(x * x) * x = 12$$

$E_1)\ (x * x) * x = 12 \Leftrightarrow \underbrace{\left(\underbrace{-3(x-3)(x-3)+3}_{x}\right)}_{y} * x = 12$

$\Leftrightarrow -3(-3(x-3)(x-3)+3-3)(x-3)+3 = 12$

$\Leftrightarrow 9(x-3)^3 + 3 = 12 \Leftrightarrow 9(x-3)^3 = 9$

$\Leftrightarrow (x-3)^3 = 1 \Leftrightarrow x - 3 = 1$

$\Leftrightarrow x = 4$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$

Se cere $f'(x)=\dfrac{3(x^3-1)}{x}$

E1) $f'(x)=(x^3-3\ln x)'=3x^2-3\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{3x^3-3}{x}\Rightarrow$

$f'(x)=\dfrac{3(x^3-1)}{x}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$,

să se afle ec. as. verticale la G_f

E1) $D_f=(0,\infty)\Rightarrow$ Studiem dacă $\exists$ as. vert în $x=0$

E2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(x^3-3\ln x)\overset{0-3\cdot(-\infty)}{=\!=\!=}\infty$

$\Rightarrow x=0$ as. vert la dreapta

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3\ln x$,

să cm $f(x)\geq 1$, $\forall x\in(0;\infty)$

E1) $f'(x)=3x^2-3\cdot\frac{1}{x}=\frac{3x^3-3}{x}$

E2) $f'(x)=0\Rightarrow x^3=1\Rightarrow x=1$

E3)

x	0		1	
f'	∄	$-$	0	$+$
f	∄	↘	1	↗

$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\cdot\frac{1}{8}-3}{\frac{1}{2}}<0\Rightarrow f'(x)<0$ pe $(0;1)\Rightarrow$

$\Rightarrow f_\searrow$ pe $(0;1)$

$f'(2)=\frac{3\cdot 8-3}{2}>0\Rightarrow f'(x)>0$ pe $(1;\infty)\Rightarrow$

$\Rightarrow f_\nearrow$ pe $(1;\infty)$

$f(1)=1-3\ln 1=1$

E4) din tabel $\Rightarrow f(x)\geq 1$, $\forall x\in(0;\infty)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+3}$, arătați că $\int_1^2 (x^2+3x+3)\cdot f(x)\,dx=6$ III 2a)

E1) $I=\int_1^2 (x^2+3x+3)\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x+3}\,dx=$

$=\int_1^2 (2x+3)\,dx=2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2+3x\Big|_1^2=$

$=(4-1)+3(2-1)=3+3=6$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}$, arătați că III 261)

aria dintre G_f, Ox și $x=0, x=3$ este $\ln 7$

$E_1)\ A=\int_0^3 |f(x)|\,dx=\int_0^3 \left|\dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}\right| dx.$

$E_2)\ x\in[0;3]\Rightarrow \dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}\geq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow A=\int_0^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+3}\,dx=\int_0^3 \frac{(x^2+3x+3)'}{x^2+3x+3}\,dx=$$

$$=\ln|x^2+3x+3|\Big|_0^3=\ln 21-\ln 3=$$

$$=\ln\frac{21}{3}=\ln 7$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V 8

II 2c)

Fie $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}$, arătați că

$$\int_{-1}^{0} f'(x)f(x)dx=0$$

E1) Soluția $\int f^n \cdot f' = \dfrac{f^{n+1}}{n+1}+C$

E2) $I=\int_{-1}^{0} f(x)\cdot f'(x)dx=\dfrac{f^2(x)}{2}\Big|_{-1}^{0}=$

$=\dfrac{1}{2}\left(f^2(0)-f^2(-1)\right)=\dfrac{1}{2}\left(1^2-1^2\right)=0$

Prof. Ovidiu Bădescu