Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al doilea termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_1=4$ și rația $q=2$.

5p **2.** Determinați coordonatele vârfului parabolei asociate funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x+1)=\log_3 5$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** Determinați numărul real m, știind că punctul $M(1,0)$ aparține dreptei de ecuație $y=mx-2$.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, în care $AB=\sqrt{2}$ și $C=\frac{\pi}{4}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2-a & 1\\ 1 & 2-a\end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(2))=-1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a)+A(-a)=2A(0)$, pentru orice număr real a.

5p **c)** Determinați numărul real x, știind că $A(x)A(x)=2A(1)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-4X^2+mX+4$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(-1)+f(1)=0$, pentru orice număr real m.

5p **b)** Pentru $m=-1$, arătați că polinomul f se divide cu polinomul X^2-1.

5p **c)** Determinați numărul real m, știind că $x_1^2+x_2^2+x_3^2-4\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(e)<\frac{7}{2}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x^2}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 x^2 f(x)\,dx=e(e-1)$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă pe intervalul $[2,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ are aria mai mică sau egală cu $e(e-1)$.

V2
I/1

Găsiți b_2 al p.g. dacă $b_1=4$, $q=2$

E1) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow b_2 = b_1 \cdot q \Rightarrow b_2 = 4 \cdot 2 = 8$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți coord vârfului parabolei lui

$f(x) = x^2 - 2x$

$E_1)$ $V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$E_2)$ $x_V = -\frac{b}{2a} = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}{4 \cdot 1} = -\frac{4-0}{4} = -1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_V = 1 \\ y_V = -1 \end{cases}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\log_3(2x+1) = \log_3 5$$

E_1) $\log_3(2x+1) = \log_3 5$
$f(x) = \log_3 x$ inj $\Rightarrow 2x+1 = 5$
$\Rightarrow x = 2$ sol posibilă

E_2) o verificăm $\Rightarrow \log_3(4+1) = \log_3 5$ adev

$\Rightarrow x = 2$ soluție

Prof. Ovidiu Bădescu

V2
I/4

Găsiți nr. submulțimilor lui $\{0;1;2;3;4\}$

E_1/ elem. apar între acolade $\Rightarrow$ submulțimi neordonate $\Rightarrow C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3!} = 10$

---

met II: sunt de forma $\{a;b\}$

$\Rightarrow \{0;1\}; \{0;2\}; \{0;3\}; \{0;4\}$

$\{1;2\}; \{1;3\}; \{1;4\} \Rightarrow$ 10 submulțimi

$\{2;3\}; \{2;4\}$

$\{3;4\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

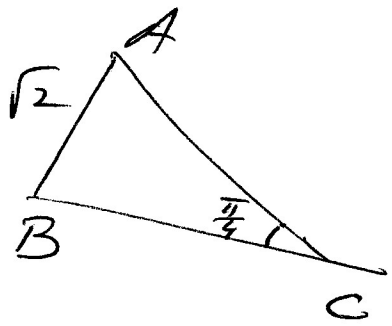
$m = ?$ dacă $M \in d$ unde $M(1;0)$, $d: y = mx - 2$

E1) $M \in d \Rightarrow$ coord sale verif. ec lui d

$\Rightarrow 0 = m \cdot 1 - 2 \Rightarrow m = 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați raza cercului circumscris $\triangle ABC$ dacă $AB=\sqrt{2}$, $C=\frac{\pi}{4}$



Fie din T. sinusurilor

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sin\frac{\pi}{4}} = 2R$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R \Rightarrow \sqrt{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}} = 2R$$

$$\Rightarrow R = 1$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V2

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix}$, arătați că $\forall a$

$$\det(A(2))=-1$$

E1) $\det A(2)=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0-1=-1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix}$, arătați că $\forall a \in \mathbb{R}$

$$A(a)+A(-a)=2A(0), \forall a \in \mathbb{R}$$

$E_1)$ $A(a)+A(-a)=\begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2+a & 1 \\ 1 & 2+a \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 2-a+2+a & 1+1 \\ 1+1 & 2-a+2+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$E_2)$ $2A(0)=2\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (2)

$E_3)$ din (1) + (2) $\Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 2-a & 1 \\ 1 & 2-a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

Să se arate că $A(x)\,A(x)=2A(1)$

E1) $A(x)\,A(x)=\begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} (2-x)^2+1 & (2-x)+(2-x) \\ (2-x)+(2-x) & 1+(2-x)^2 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} x^2-4x+5 & 4-2x \\ 4-2x & x^2-4x+5 \end{pmatrix}$

E2) $2A(1)=2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

E3) $A(x)\,A(x)=2A(1) \Rightarrow \begin{cases} x^2-4x+5=2 \\ 4-2x=2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x^2-4x+3=0 \Rightarrow x \in \{1;3\} \\ 2x=2 \Rightarrow x=1 \end{cases}$

Soluția comună $\Rightarrow \boxed{x=1}$

Prof. Ovidiu Badescu

V2
I 2.01

Fie $f = X^3 - 4X^2 + mX + 4$, $m \in \mathbb{R}$

Sa se arate $f(-1) + f(1) = 0$, $\forall m \in \mathbb{R}$

$E_1)$ $f(-1) + f(1) = (-1 - 4 - m + 4) + (1 - 4 + m + 4) =$

$= (-1 - m) + (1 + m) = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

II 26)

Fie $f = X^3 - 4X^2 + mX + 4$

Dt $m = -1$, arătați că $f \vdots (X^2 - 1)$

E1) $m = -1 \Rightarrow f = X^3 - 4X^2 - X + 4$

E2) $f \vdots g \Leftrightarrow$ restul $f : g$ este 0

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 4X^2 - X + 4 & X^2 - 1 \\ \hline -X^3 \quad\quad +X & X - 4 \\ \hline \quad -4X^2 \quad\quad +4 & \\ \quad 4X^2 \quad\quad -4 & \\ \hline \quad\quad\quad 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow$ restul $= 0 \rightarrow f \vdots (X^2 - 1)$

Prof. Ovidiu Bădescu

V2

Fie $f = X^3 - 4X^2 + mX + 4$, se cere $m = ?$ dacă $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = 0$

E_1) Stim că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = S_1^2 - 2S_2$

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2}{x_1x_2x_3} = \frac{S_2}{S_3}$

E_2) relat. dorită: $S_1^2 - 2S_2 - 4 \cdot \frac{S_2}{S_3} = 0$ (1)

E_3) din VIETE, $S_1 = -\frac{b}{a} = 4$

Înlocuim în (1)

$S_2 = \frac{c}{a} = m$

$S_3 = -\frac{d}{a} = -4$

$\Rightarrow 16 - 2 \cdot m - 4 \cdot \frac{m}{-4} = 0$

$16 - 2m + m = 0 \rightarrow \boxed{m = 16}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$, să se arate că $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

E1) $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-x+1}{x-1}\right)'=\dfrac{(x^2-x+1)'(x-1)-(x^2-x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=$

$=\dfrac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}=$

$=\dfrac{2x^2-2x-x+1-x^2+x-1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$, se știe că $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$,

se cere ec. tg în $x=2$

E1) ec. tg în $x=2$ este

$$y-f(2)=f'(2)(x-2)$$

E2) $f(2)=\frac{4-2+1}{2-1}=3$

$f'(2)=\frac{2\cdot 0}{1^2}=0$ (din i_1)

E3) ec. tg: $y-3=0(x-2)$

$\Rightarrow \boxed{y=3}$

Prof. Ovidiu Badescu

V2
II 1c)

Fie $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x-1}$, $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$

Se știe că $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x\in(1;\infty)$ și $f(e)<\frac{7}{2}$

E1)

x	1		2	e	
f'	‖	$-$	0	$+$	$+$
f	‖	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	

E2) $e=2,7\ldots \Rightarrow e<3$

f crescătoare pe $[e;\infty)$ $\Rightarrow f(e)<f(3)$

$\Rightarrow f(e)<\frac{9-3+1}{2}=\frac{7}{2}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\frac{2x+3}{x^2+3x+3}$, arătați că

V2
II 2a)

$$\int_1^2 (x^2+3x+3)\cdot f(x)\,dx = 6$$

$$E_1)\ I=\int_1^2 (x^2+3x+3)\cdot\frac{2x+3}{x^2+3x+3}\,dx =$$

$$=\int_1^2 (2x+3)\,dx = 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2 + 3x\Big|_1^2 =$$

$$=(4-1)+3(2-1)=3+3=6$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+3x+3}$, arătați că aria dintre G_f, Ox și $x=0$ și $x=3$ este $\ln 7$

$E_1)\ A = \int_0^3 |f(x)|\,dx = \int_0^3 \left|\frac{2x+3}{x^2+3x+3}\right| dx$

$E_2)\ x \in [0;3] \Rightarrow \frac{2x+3}{x^2+3x+3} > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \int_0^3 \frac{2x+3}{x^2+3x+3}\,dx = \int_0^3 \frac{(x^2+3x+3)'}{x^2+3x+3}\,dx$

$= \ln|x^2+3x+3|\Big|_0^3 =$

$= \ln|9+9+3| - \ln|0+0+3| =$

$= \ln 21 - \ln 3 = \ln\frac{21}{3} = \ln 7$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\dfrac{2x+3}{x^2+3x+3}$, arătați că

$$\int_{-1}^{0} f'(x)\, f(x)\, dx = 0$$

E1) există formula

$$\int_a^b f^n(x)\, f'(x)\, dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1}\Big|_a^b$$

E2) $I=\int_{-1}^{0} f(x)\, f'(x)\, dx = \dfrac{f^2(x)}{2}\Big|_{-1}^{0} =$

$$= \frac{1}{2}\left(f^2(0) - f^2(-1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{1-3+3}\right)^2 \right) =$$

$$= \frac{1}{2}(1-1) = 0$$

Prof. Ovidiu Bădescu