Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p 1. Arătați că $\left(\sqrt{5}+2\right)^2-4\sqrt{5}=9$.

5p 2. Determinați numărul real m, știind că punctul $M(m,4)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4\left(x^2+9\right)=\log_4 25$.

5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, acesta să fie divizibil cu 2.

5p 5. Determinați numărul real a, pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=2\vec{i}-6\vec{j}$ sunt coliniari.

5p 6. Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\cos x=\frac{1}{2}$, arătați că $\sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+3x & 2x\\ -6x & 1-4x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p a) Arătați că $\det(A(0))=1$.

5p b) Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y-xy)$, pentru orice numere reale x și y.

5p c) Determinați numărul real x, știind că $A\left(2^x\right)A\left(2^x\right)=A(1)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-X^2+aX+2$, unde a este număr real.

5p a) Arătați că $f(-1)+f(1)=2$, pentru orice număr real a.

5p b) Determinați numărul real a, pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul X^2-2X+2.

5p c) Demonstrați că $x_1^3+x_2^3+x_3^3+3x_1x_2+3x_2x_3+3x_1x_3=-5$, pentru orice număr real a, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2x-11}{x-3}$.

5p a) Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$, $x\in(3,+\infty)$.

5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p c) Demonstrați că $f(\pi)>13$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3x+1)e^x$.

5p a) Arătați că $\int_0^1\frac{1}{e^x}f(x)\,dx=\frac{5}{2}$.

5p b) Determinați numărul real m, pentru care funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(3x+m)e^x$ este o primitivă a funcției f.

5p c) Determinați numărul real nenul a, știind că $\int_0^a f(x)\,dx=3a$.

Arătați că: $(\sqrt{5}+2)^2-4\sqrt{5}=9$

$E_1)\ (\sqrt{5}+2)^2-4\sqrt{5}=5+4\sqrt{5}+4-4\sqrt{5}=9$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți $m \in \mathbb{R}$ dacă $M(m,4)$ este pe G_f unde $f(x)=x+2$

E,) $M(m,4) \in G_f \Leftrightarrow f(m)=4 \Leftrightarrow m+2=4$

$\Leftrightarrow m=2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați: $\log_4(x^2+9)=\log_4 25$

E_1) deoarece $f(x)=\log_4 x$ e injectivă, din ce de mai sus avem $x^2+9=25$

$\Leftrightarrow x^2=16 \Leftrightarrow x=\pm 4$ soluții posibile, le verificăm

E_2) $x_1=4$: $\log_4(16+9)=\log_4 25 \Leftrightarrow \log_4 25=\log_4 25$

adev $\Rightarrow x=4$ soluție

$x_2=-4$: $\log_4(16+9)=\log_4 25 \Leftrightarrow \log_4 25=\log_4 25$

adev $\Rightarrow x=-4$ soluție

$S_f: x\in\{-4;4\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți probabilitatea ca alegând un număr din $M=\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$, acesta să fie divizibil cu 2

$E_1)\ P=\dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz favorabile: nr. $\vdots$ 2 din M adică

$2;4;6;8 \Rightarrow 4$ caz favorabile

$E_3)$ nr. caz posibile: toate nr. din M adică 9

$E_4)\ P=\dfrac{4}{9}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți $a \in \mathbb{R}$ dacă $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari unde $\vec{u} = (a-1)\vec{i} - 3\vec{j}$

$\vec{v} = 2\vec{i} - 6\vec{j}$

E_1) $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari $\Leftrightarrow \frac{x_u}{x_v} = \frac{y_u}{y_v}$

E_2) în cazul nostru $\Rightarrow \frac{a-1}{2} = \frac{-3}{-6} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6(a-1) = -6 \Leftrightarrow -6a + 6 = -6$

$\Leftrightarrow -6a = -12 \Leftrightarrow \boxed{a = 2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Dacă $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ și $\cos x = \frac{1}{2}$, să se arate că $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$E_1)$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$E_2)$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x + \frac{1}{4} = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

Dar, $x \in (0; \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \sin x > 0$ $\Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$E_3)$ $\sin 2x = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1+3x & 2x \\ -6x & 1-4x \end{pmatrix}$

Arătați că $\det(A(0))=1$

Rezolvare: $\det(A(0))=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1-0=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1+3x & 2x \\ -6x & 1-4x \end{pmatrix}$

Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y-xy)$

$E_1)$ $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix} 1+3x & 2x \\ -6x & 1-4x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+3y & 2y \\ -6y & 1-4y \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} (1+3x)(1+3y)-12xy & (1+3x)2y+2x(1-4y) \\ -6x(1+3y)+(1-4x)(-6y) & -12xy+(1-4x)(1-4y) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1+3y+3x+9xy-12xy & 2y+6xy+2x-8xy \\ -6x-18xy-6y+24xy & -12xy+1-4y-4x+16xy \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1+3x+3y-3xy & 2x+2y-2xy \\ -6x-6y+6xy & -4x-4y+4xy+1 \end{pmatrix}$ (1)

$E_2)$ $A(x+y-xy)=\begin{pmatrix} 1+3(x+y-xy) & 2(x+y-xy) \\ -6(x+y-xy) & 1-4(x+y-xy) \end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix} 1+3x+3y-3xy & 2x+2y-2xy \\ -6x-6y+6xy & 1-4x-4y+4xy \end{pmatrix}$ (2)

$E_3)$ din (1) și (2) $\Rightarrow A(x)\cdot A(y)=A(x+y-xy)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1+3x & 2x \\ -6x & 1-4x \end{pmatrix}$,

să știe că $A(x)A(y)=A(x+y-xy)$, găsiți $x\in\mathbb{R}$ dacă $A(2^x)A(2^x)=A(1)$

E1) folosind $A(x)A(y)=A(x+y-xy) \Rightarrow$

se devine: $A(2^x)A(2^x)=A(1) \Leftrightarrow$

$$A(2^x+2^x-2^x\cdot 2^x)=A(1) \Leftrightarrow$$

$$2^x+2^x-2^{2x}=1.$$

E2) notăm $2^x=t \Rightarrow t+t-t^2=1$

$$\Rightarrow 2t-t^2-1=0 \mid\cdot(-1) \Rightarrow t^2-2t+1=0$$

$$t_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2\cdot 1}=\frac{2}{2}=1$$

E3) $2^x=1$, $f(x)=2^x$ inject $\Rightarrow x=0$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f = X^3 - X^2 + aX + 2$, arătați că $f(-1) + f(1) = 2$

$E_1)$ $f(-1) + f(1) = ((-1)^3 - (-1)^2 + a(-1) + 2) +$

$+ (1 - 1 + a + 2) =$

$= (-1 - 1 - a + 2) + (a + 2) = -a + a + 2 = 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 - X^2 + aX + 2$, $a \in \mathbb{R}$
a dacă $f : (X^2 - 2X + 2)$

E_1) $f : g \Leftrightarrow$ restul $f : g$ este 0

E_2) $X^3 - X^2 + aX + 2 \;\big|\; X^2 - 2X + 2$
$\quad -X^3 + 2X^2 - 2X \qquad\qquad X + 1$
$\quad \searrow \; X^2 + (a-2)X + 2$
$\quad\quad -X^2 + 2X - 2$
$\quad\quad \searrow \; (a-2+2)X \searrow$

E_3) $R(X) = aX$ iar $f : g \Leftrightarrow R(X) = 0$
$\Leftrightarrow a = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 - X^2 + aX + 2$, $a \in \mathbb{R}$ a.î.

$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3x_1x_2 + 3x_2x_3 + 3x_1x_3 = -5$

E1) $f = X^3 - X^2 + aX + 2$, din VIETE $\Rightarrow$

$$\begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 1 \\ S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} = a \\ S_3 = x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} = -2 \end{cases}$$

E2) x_1 rad $\Rightarrow x_1^3 - x_1^2 + ax_1 + 2 = 0$

x_2 rad $\Rightarrow x_2^3 - x_2^2 + ax_2 + 2 = 0$

x_3 rad $\Rightarrow x_3^3 - x_3^2 + ax_3 + 2 = 0$

---

adunând $\Rightarrow S_3 - S_2 + aS_1 + 6 = 0$ unde

$S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$

E3) dar, $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2 = 1 - 2a$

$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = 1$ și înlocuim în

$S_3 - S_2 + aS_1 + 6 = 0$ și obținem:

$S_3 - (1 - 2a) + a \cdot 1 + 6 = 0 \Rightarrow$

$S_3 - 1 + 2a + a + 6 = 0 \Rightarrow S_3 = -3a - 5$

E4) $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) = -3a - 5 + 3a = -5$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{x^2+2x-11}{x-3}$, arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$

$E_1)$ $f'(x)=\left(\frac{x^2+2x-11}{x-3}\right)'=\frac{(x^2+2x-11)'(x-3)-(x^2+2x-11)(x-3)'}{(x-3)^2}$

$=\frac{(2x+2)(x-3)-(x^2+2x-11)\cdot 1}{(x-3)^2}=$

$=\frac{2x^2-6x+2x-6-x^2-2x+11}{(x-3)^2}=$

$=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}$

$E_2)$ $(x-1)(x-5)=x^2-5x-x+5=x^2-6x+5$

(am folosit concluzia)

$\Rightarrow f'(x)=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$

Obs.: era CORECT să continuăm cu $f'(x)$

astfel: $f'(x)=\frac{x^2-6x+5}{(x-3)^2}=\frac{x^2-x-5x+5}{(x-3)^2}=$

$=\frac{x(x-1)-5(x-1)}{(x-3)^2}=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = \frac{x^2+2x-11}{x-3}$, se cere ec. as. oblice spre ∞ pt G_f

---

E1) Se cere direct as. oblică, deci nu mai e necesar să calc as. ori.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-11}{x^2-3x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(1+\frac{2}{x}-\frac{11}{x^2})}{x^2(1-\frac{3}{x})} =$$

$$= 1 \in \mathbb{R}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+2x-11}{x-3} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-11-x^2+3x}{x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(5-\frac{11}{x})}{x(1-\frac{3}{x})} = 5 \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ ec. asimpt este $y = mx+n$ adică

$$y = x+5$$

Prof. Ovidiu Băleșcu

Fie $f:(3;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+2x-11}{x-3}$,

arătați că $f(\pi)>13$, știind că $f'(x)=\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2}$

$E_1)$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x-5)=0 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} x-3=0 \Rightarrow x=3 \notin D_f \\ \text{sau} \\ x-5=0 \Rightarrow x=5 \in D_f \end{cases}$

$E_2)$

x	$(3$		5
f'	$\nexists$	$-\ -\ -$	0
f	$\nexists$	$\searrow$	

$f'(4)=\frac{(4-1)(4-5)}{(4-3)^2}=-\frac{3}{1}<0 \Rightarrow f'(x)<0$ pt $x\in(3;5)$

$\Rightarrow f$ $\searrow$ pe $(3;5)$

$E_3)$ $f(5)=\frac{25+10-11}{2}=12$

$f(4)=\frac{16+8-11}{1}=13$

$E_4)$ cum $\pi<4$ și $f\searrow$ pe $(\pi;4)$

$\Rightarrow f(\pi)>f(4) \Rightarrow f(\pi)>13$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=(3x+1)e^x$, să se arate că

$$\int_0^1 \frac{1}{e^x} f(x)\,dx = \frac{5}{2}$$

E.1) $I=\int_0^1 \frac{1}{e^x}(3x+1)e^x\,dx = \int_0^1 (3x+1)\,dx =$

$= 3\cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + x\Big|_0^1 = \frac{3}{2}(1-0)+(1-0) =$

$= \frac{3}{2}+1 = \frac{5}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=(3x+1)e^x$, găsiți $m\in\mathbb{R}$ dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=(3x+m)e^x$ este o primitivă a funcției f

---

E_1) ar trebui ca F derivabilă și $F'(x)=f(x)$

E_2) $F'(x)=\left((3x+m)e^x\right)'=(3x+m)'e^x+(3x+m)(e^x)'=$

$=3e^x+(3x+m)e^x=$

$=(3+3x+m)e^x$

E_3) $F'(x)=f(x)\Rightarrow 3x+1=3+3x+m$

$\Leftrightarrow \underline{m=-2}$

Prof. Ovidiu Badescu

M2/2016/ V1

Fie $f(x)=(3x+1)e^x$, x are II 2c)

$a\in\mathbb{R}^*$ dacă $\int_0^a f(x)dx=3a$

E1) $I=\int_0^a f(x)dx=\int_0^a (3x+1)e^x dx=$

$f=3x+1 \Rightarrow f'=3$

$g'=e^x \Rightarrow g=\int e^x dx=e^x$

$I=(3x+1)e^x\Big|_0^{-a}-\int_0^{-a}3e^x dx=$

$=\left((3a+1)e^a-e^0\right)-3\cdot e^x\Big|_0^{-a}=$

$=(3a+1)e^a-1-3(e^a-e^0)=$

$=(3a+1)e^a-1-3e^a+3$ $\Big\}\Rightarrow$

E2) $I=3a$

$\Rightarrow 3ae^a+e^a-3e^a+2=3a$

$\Leftrightarrow \underbrace{3ae^a-2e^a+2-3a}=0$

$3a(e^a-1)-2(e^a-1)=0$

$\Rightarrow (e^a-1)(3a-1)=0 \Rightarrow$ $\begin{cases} e^a=1\Rightarrow a=0 \\ \text{sau} \\ 3a-1=0\Rightarrow a=\frac{1}{3} \end{cases}$

E3) a are a nenul $\Rightarrow \boxed{a=\frac{1}{3}}$

Prof. Ovidiu Badescu