Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p 1. Determinați primul termen al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_5=48$ și $b_8=384$.

5p 2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-7x+6$. Determinați distanța dintre punctele de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $32^x=16\cdot 2^x$.

5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr natural n din mulțimea $\{1,2,3,4,5\}$, acesta să verifice egalitatea $n^2-5n+6=0$.

5p 5. Determinați numărul real a, știind că vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=6\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.

5p 6. Arătați că $(2\sin x+\cos x)^2+(\sin x+2\cos x)^2-4\sin 2x=5$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0 & x\\ y & 0\end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.

5p a) Arătați că $\det(2A)=-28$.

5p b) Determinați numerele reale x și y, știind că $A+2B=I_2$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p c) Dacă $AB=BA$, arătați că $\det B\leq 0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

5p a) Arătați că $(-1)\circ 1=-1$.

5p b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x\circ x=x$.

5p c) Determinați perechile (a,b) de numerele întregi, știind că $a\circ b=8$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)e^x$.

5p a) Arătați că $f'(x)=(x-1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p c) Demonstrați că $f'(x)\geq -1$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x}$.

5p a) Arătați că $\displaystyle\int_1^2\left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=3$.

5p b) Demonstrați că funcția $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=x^2+\ln x+2016$ este o primitivă a funcției f.

5p c) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este mai mic decât 14π.

Găsiți primul termen al progr geometrice $\frac{\text{V 141}}{\text{I/1}}$
b_n dacă $b_5 = 48$ și $b_8 = 384$

E_1) folosim $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

E_2) $b_5 = 48 \Rightarrow b_1 \cdot q^4 = 48$

$b_8 = 384 \Rightarrow b_1 \cdot q^7 = 384$

E_3) $\begin{cases} b_1 q^4 = 48 \\ b_1 \cdot q^7 = 384 \end{cases}$ împărțim $\Rightarrow \frac{b_1 q^4}{b_1 q^7} = \frac{48}{384}$

$\Rightarrow \frac{1}{q^3} = \frac{1}{8} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$

E_4) din $b_1 \cdot q^4 = 48$ și $q = 2 \Rightarrow$

$b_1 \cdot 2^4 = 48 \Rightarrow b_1 \cdot 16 = 48$

$\Rightarrow b_1 = \frac{48}{16} = 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

V141
I/2

Fie $f(x) = x^2 - 7x + 6$, găsiți distanța dintre punctele de intersecție ale Gp cu Ox

---

$E_1)$ $\cap Ox$: $y = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$

$E_2)$ $x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 5}{2} \begin{matrix} 6 \\ 1 \end{matrix}$

$E_3)$ $A(6;0)$ și $B(1;0)$

$E_4)$ dist dintre A și B este

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} =$$

$$= \sqrt{(1-6)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Prof. Ovidiu Badescu

V/49
I/5

Rezolvați în $\mathbb{R}$: $32^x = 16 \cdot 2^x$

$E_1)$ $32 = 2^5 \Rightarrow$ ec.:

$$(2^5)^x = 2^4 \cdot 2^x$$

$$\Rightarrow 2^{5x} = 2^{x+4}$$

$E_2)$ $f(x) = 2^x$ inj $\Rightarrow 5x = x+4$

$$\Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați probabilitatea ca alegând $\frac{V 14}{I 14}$
$n \in \{1;2;3;4;5\}$, acesta să verifice $n^2-5n+6=0$

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{m. caz favorabile}}{\text{m. caz posibile}}$

$E_2)$ <u>m. caz posibile</u> : toate el din $\{1;2;3;4;5\}$
adică 5 cazuri

$E_3)$ <u>m. caz favorabile</u>: verif. ec.:

$n=1 \Rightarrow 1-5+6=0 \Rightarrow 2=0$ K.O.

$n=2 \Rightarrow 4-10+6=0 \Rightarrow 0=0$ OK

$n=3 \Rightarrow 9-15+6=0 \Rightarrow 0=0$ OK.

$n=4 \Rightarrow 16-20+6=0 \Rightarrow 2=0$ K.O.

$n=5 \Rightarrow 25-25+6=0 \Rightarrow 6=0$ K.O.

$\Rightarrow$ 2 favorabile

$E_4)$ $P = \dfrac{2}{5}$

<u>OSS.</u>: dacă eram deștepți, rezolvam
$n^2-5n+6=0 \Rightarrow \begin{cases} n_1=2 \\ n_2=3 \end{cases} \Rightarrow$ 2 favorabile

Prof. Ovidiu Bădescu

V141

Găsiți a dacă $\vec{u}=(a+1)\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=6\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari

I/5

$E_1)$ $\vec{u}$ și $\vec{v}$ coliniari

$$\Leftrightarrow \frac{x_u}{x_v}=\frac{y_u}{y_v}$$

$E_2)$ În cazul nostru, $\frac{a+1}{6}=\frac{a-1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2(a+1)=6(a-1) \Rightarrow 2a+2=6a-6$$

$$\Rightarrow -4a=-8$$

$$\Rightarrow \boxed{a=2}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V141
I/6

Arătați că:

$(2\sin x+\cos x)^2+(\sin x+2\cos x)^2-4\sin 2x=5$

$E_1)\ (2\sin x+\cos x)^2+(\sin x+2\cos x)^2-4\sin 2x=$

$=(4\sin^2 x+4\sin x\cos x+\cos^2 x)+(\sin^2 x+4\sin x\cos x+$
$+4\cos^2 x)-4\sin 2x=$

$=5\sin^2 x+8\sin x\cos x+5\cos^2 x-4\sin 2x$

$=5(\underbrace{\sin^2 x+\cos^2 x}_{1})+8\sin x\cos x-4\sin 2x$

$=5+8\sin x\cos x-4\sin 2x\ (*)$

$E_2)$ Dar, $\sin 2x=2\sin x\cos x$

$\Rightarrow 4\sin 2x=8\sin x\cos x$ și înlocuim

în $(*)$

$E_3)\ M_\Delta=5+8\sin x\cos x-4\cdot 2\sin x\cos x$

$=5$

Prof. Ovidiu Bădescu

V151
II19)

Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$, arătați că

$$\det(2A)=-28$$

E1) $2A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 8 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow \det(2A)=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 8 & 2\end{vmatrix}=4-32$

$=-28$

Prof. Ovidiu Bădescu

V191
II 16)

Fie $A=\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&x\\y&0\end{pmatrix}$, găsiți $x,y\in\mathbb{R}$ dacă $A+2B=I_2$

$E_1)$ $A+2B=\begin{pmatrix}1&2\\4&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2x\\2y&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2x+2\\4+2y&1\end{pmatrix}$

$E_2)$ $A+2B=I_2 \Rightarrow \begin{cases}2x+2=0\\4+2y=0\end{cases}$

$\not{\Rightarrow}$ $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases}x=-1\\y=-2\end{cases}$

Prof. Ovidiu Badescu

VI §1
II 10)

Fie $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}0 & x\\ y & 0\end{pmatrix}$,

dacă $AB=BA$, arătați că $\det B\leq 0$

$E_1)$ $AB=BA \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & x\\ y & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & x\\ y & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}2y & x\\ y & 4x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x & x\\ y & 2y\end{pmatrix}$

$E_2)$ $\Rightarrow \begin{cases}2y=4x\\ 4x=2y\end{cases} \Rightarrow y=2x$

$E_3)$ $y=2x \Rightarrow B=\begin{pmatrix}0 & x\\ 2x & 0\end{pmatrix}$

$E_4)$ $\det B=\begin{vmatrix}0 & x\\ 2x & 0\end{vmatrix}=0-2x^2=-2x^2\leq 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

V141

Fie $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$, arătați II 2c)

că $(-1) \circ 1 = -1$

$E_1)$ $(-1) \circ 1 = 3 \cdot (-1) \cdot 1 + 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 1 + 2 =$

$= -3 - 3 + 3 + 2 = -1$

Prof. Ovidiu Bădescu

V161

Dacă $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$, rezolvați în $\mathbb{R}$: $x \circ x = x$ (II 25)

$E_1)$ $x \circ x = x \Leftrightarrow$

$3x^2 + 3x + 3x + 2 = x$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 5x + 2 = 0$

$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25-24}}{2 \cdot 3}$

$E_2)$ $x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{6}$ $\begin{cases} \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3} \\ \frac{-6}{6} = -1 \end{cases}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V141
II 2c)

Fie $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$, găsiți perechile (a, b) de numere întregi dacă $a \circ b = 8$

$E_1)$ $a \circ b = 8 \Rightarrow 3ab + 3a + 3b + 2 = 8$

$\Rightarrow 3ab + 3a + 3b - 6 = 0$

$E_2)$ $3a(b+1) + 3(b+1) - 9 = 0$

$\Rightarrow (b+1)(3a+3) = 9$

$\Rightarrow 3(a+1)(b+1) = 9$

$\Rightarrow (a+1)(b+1) = 3$

$E_3)$ $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a+1,\ b+1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ cazurile

Caz I: $a+1 = -3,\ b+1 = -1 \Rightarrow a = -4,\ b = -2$

Caz II: $a+1 = -1,\ b+1 = -3 \Rightarrow a = -2,\ b = -4$

Caz III: $a+1 = 1,\ b+1 = 3 \Rightarrow a = 0,\ b = 2$

Caz IV: $a+1 = 3,\ b+1 = 1 \Rightarrow a = 2,\ b = 0$

$E_4)$ $(a, b) \in \{(-4;-2); (-2;-4); (0;2); (2;0)\}$

Prof. Ovidiu Badescu

V151

Fie $f(x)=(x-2)e^x$, arătați că III 1a)

$$f'(x)=(x-1)e^x$$

$E_1)$ $f'(x)=\left((x-2)e^x\right)'=(x-2)'e^x+(x-2)(e^x)'=$

$=1\cdot e^x+(x-2)e^x=e^x(1+x-2)\Rightarrow$

$E_2)$ $f'(x)=e^x(x-1)$

Prof. Ovidiu Bădescu

V141

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)e^x$, găsiți III 15)
ec. asimpt orizontale spre $-\infty$ ale G_f

E_1) ec asimpt oriz spre $-\infty$ ale G_f este

$y=l$ unde $l=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

E_2) $l=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-2)e^x \overset{-\infty\cdot 0}{=\!=\!=}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{\frac{1}{e^x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-2}{e^{-x}}\overset{\frac{-\infty}{\infty}}{\overset{l'H}{=\!=\!=}}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}\overset{\frac{1}{-\infty}}{=\!=\!=}0\in\mathbb{R}$

E_3) $\Rightarrow y=0$ as. oriz spre $-\infty$

Prof. Ovidiu Bădescu

V/141
III 10)

Fie $f(x)=(x-2)e^x$, arătați că

$$f'(x)\geq -1,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$E_1)$ $f'(x)=\left((x-2)e^x\right)'=1\cdot e^x+(x-2)e^x=$

$$=e^x(1+x-2)=(x-1)e^x$$

$E_2)$ $f''(x)=\left((x-1)e^x\right)'=1\cdot e^x+(x-1)e^x=$

$$=e^x(1+x-1)=xe^x$$

$E_3)$ $f''(x)=0\Rightarrow x\cdot e^x=0\Rightarrow$ / $x=0$ sau $e^x=0$ fals

$E_4)$

x		0	
f''	$-\ -\ -$	0	$+\ +\ +$
f'	$\searrow$		$\nearrow$

Ne a găsi semnul lui $f''(x)$, dăm valori

$$f''(-1)=-1\cdot e^{-1}=-\frac{1}{e}<0\Rightarrow f''(x)<0,\ x\in(-\infty;0)$$

$$\Rightarrow f'\searrow,\ x\in(-\infty;0)$$

$$f''(1)=1e>0\Rightarrow f''(1)>0,\ x\in(0;\infty)\Rightarrow f'\nearrow,\ x\in(0;\infty)$$

$E_5)$ Cum $f'(0)=(0-1)e^0=-1\xrightarrow{\text{Lalul}}f'(x)\geq -1,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Badescu

V 141

Fie $f(x)=\frac{2x^2+1}{x}$, arătați că IV 29)

$$\int_1^2 \left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=3$$

$\in_1$) $I=\int_1^2 \left(f(x)-\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^2 \left(\frac{2x^2+1}{x}-\frac{1}{x}\right)dx=$

$=\int_1^2 \frac{2x^2+1-1}{x}dx=\int_1^2 2x\,dx=2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=$

$=4-1=3$

Prof. Ovidiu Bădescu

V151
II 26)

Fie $f(x)=\frac{2x^2+1}{x}$, arătați că $F(x)=x^2+\ln x+2016$ este o primitivă a lui f

---

E_1) ar trebui arătat că

$$\begin{cases} F \text{ derivabilă} \\ F'(x)=f(x) \end{cases}$$

E_2) evident F derivabilă

E_3) $F'(x)=(x^2+\ln x+2016)'=2x+\frac{1}{x}+0=$

$$=\frac{2x^2+1}{x}=f(x)$$

$\Rightarrow F$ primitivă a lui f

Prof. Ovidiu Bădescu

V114

Fie $f(x)=\frac{2x^2+1}{x}$, arătați că volumul π 2c)
corpului obținut prin rotația în jurul
lui Ox a G_g este mai mic decât 14π
unde $g:[1;2]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$

E1) $V(C_g)=\pi\int_a^b g^2(x)dx=$

$=\pi\int_1^2\left(\frac{2x^2+1}{x}\right)^2dx=\pi\int_1^2\frac{4x^4+4x^2+1}{x^2}dx$

$=\pi\int_1^2(4x^2+4+\frac{1}{x^2})dx=$

$=\pi\left(4\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_1^2+4x\Big|_1^2+\int_1^2 x^{-2}dx\right)=$

$=\pi\left(4\cdot\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)+4(2-1)+\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^2\right)=$

$=\pi\left(\frac{28}{3}+\frac{3}{4}-\frac{1}{x}\Big|_1^2\right)=\pi\left(\frac{40}{3}-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right)=$

$=\pi\left(\frac{2}{40}+\frac{3}{1}{2}\right)=4\cdot\frac{83}{6}$ $\Big\}\Rightarrow V(C_g)<14\pi$

E2) Dar, $\frac{83}{6}=13,8...<14$ $\Big\}$

Prof. Ovidiu Bădescu