Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

VARA, 2016

Varianta 8

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\left(\sqrt{2}-3\right)^2+\left(\sqrt{2}+3\right)^2=22$.

5p **2.** Calculați produsul $f(-1)f(0)f(1)$, unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+2$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3\left(x^2-6x+6\right)=\log_3 1$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale pare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 5, 7, 8 și 9.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$ și $B(1,2)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul O și este paralelă cu dreapta AB.

5p **6.** Arătați că $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=0$, pentru orice număr real x.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & x^2+x\\ 0 & 1 & 2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(1)\right)=1$.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)A(y)=A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a\neq -1$, știind că $A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdot\ldots\cdot A\left(\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)$.

2. Se consideră polinomul $f=X^4+mX^2+2$, unde m este număr real.

5p **a)** Determinați numărul real m, știind că $f(1)=0$.

5p **b)** Demonstrați că $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2(x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4)=0$, pentru orice număr real m, unde x_1, x_2, x_3 și x_4 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Pentru $m=3$, descompuneți polinomul f în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că, pentru orice număr real a, $a\in(-1,1)$, ecuația $f(x)=a$ are soluție unică.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x-1)$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=0$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=2$ are aria egală cu e.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_{-n}^{1}\left(f(x)+e^x\right)dx=0$.

Prof. Ovidiu Pădescu

Arătați că:

$$(\sqrt{2}-3)^2+(\sqrt{3}+3)^2=22$$

E,) $(\sqrt{2}-3)^2+(\sqrt{3}+3)^2=(2-6\sqrt{2}+9)+(2+6\sqrt{2}+9)=$

$=11+11=22$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați: $f(-1)f(0)f(1)$, $f(x)=2x+2$

$E_1)$ $f(-1)=-2+2=0$

$f(0)=0+2=2$

$f(1)=2+2=4$

$E_2)$ $f(-1)f(0)f(1)=0\cdot 2\cdot 4=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\log_3(x^2-6x+6)=\log_3 1$$

$E_1)$ $f(x)=\log_3 x$ inj $\Big\} \Rightarrow x^2-6x+6=1$

$\log_3(x^2-6x+6)=\log_3 1$

$E_2)$ $x^2-6x+5=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-20}}{2\cdot 1}=\dfrac{6\pm 4}{2}\begin{matrix}5\\1\end{matrix}$ soluții posibile

$E_3)$ le verific în ec. inițială:

$x_1=5 \Rightarrow \log_3(25-30+6)=\log_3 1 \Leftrightarrow \log_3 1=\log_3 1$ adev

$\Rightarrow x_1=5$ soluție

$x_2=1 \Rightarrow \log_3(1-6+6)=\log_3 1 \Leftrightarrow \log_3 1=\log_3 1$ adev

$\Rightarrow x_2=1$ soluție

$S_f: x\in\{1;5\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Câte numere naturale pare, de trei cifre distincte, se pot forma cu cifrele 5, 7, 8 și 9

E_1) $N = \overline{abc}$ cu $a, b, c \in \{5; 7; 8; 9\}$

E_2) nr. pare $\Rightarrow$ c par $\Rightarrow c = 8$ (singurul par)

E_3) $c \rightarrow$ 1 var ($c = 8$)

$a \rightarrow$ 3 var

$b \rightarrow$ 2 v.

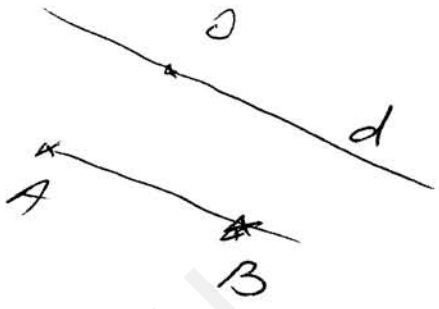
a, b indep

cu regula produsului $\Rightarrow 3 \cdot 2 = 6$ numere

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016
V8/I/5

Fie $A(-1;0)$, $B(1;2)$, să se scrie ec. dreptei d care trece prin O și este paralelă cu AB



$E_1)$ $d \parallel AB \Rightarrow m_d = m_{AB}$

$E_2)$ $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2-0}{1+1} = 1$

$E_3)$ $m_d = m_{AB} \Rightarrow m_d = 1$

$E_4)$ d trece prin $O(0;0) \Rightarrow y - y_0 = m_d(x - x_0)$

$\Rightarrow y - 0 = 1(x-0) \Rightarrow y = x$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2016
V6/16

Arătați că:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=0,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

$E_1)$ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin\frac{3\pi}{2}\cos x+\cos\frac{3\pi}{2}\sin x=$

$=-1\cdot\cos x+0\cdot\sin x=-\cos x$

$E_2)$ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=\sin\frac{3\pi}{2}\cos x-\cos\frac{3\pi}{2}\sin x=$

$=-1\cdot\cos x-0\cdot\sin x=-\cos x$

$E_3)$ $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\cos x-(-\cos x)=$

$=-\cos x+\cos x=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & x^2+x \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se cere $\det(A(1))=1$

$E_1)$ $A(1)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $\det(A(1))=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=1$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016
V8 (II/1.6)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & x^2+x \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Arătați că $A(x)A(y)=A(x+y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

$E_1)$ $A(x)A(y)=\begin{pmatrix} 1 & x & x^2+x \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y & y^2+y \\ 0 & 1 & 2y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 1 & y+x & y^2+y+2xy+x^2+x \\ 0 & 1 & 2x+2y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $A(x+y)=\begin{pmatrix} 1 & x & (x+y)^2+(x+y) \\ 0 & 1 & 2(x+y) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_3)$ ar fi suficient să arătăm că

$(x+y)^2+(x+y)=y^2+y+2xy+x^2+x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2+x+y=y^2+y+2xy+x^2+x$ adev.

$\Rightarrow A(x)A(y)=A(x+y)$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016
(V8/II/4c)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & x^2+x \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se știe că $A(x)A(y)=A(x+y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$,

să se afle $a=?$, $a\in\mathbb{R}$, $a\neq -1$ dacă

$$A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdots A\left(\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)$$

E_1) prin inducție arătăm că:

$$A(x_1)A(x_2)\cdots A(x_n)=A(x_1+x_2+\cdots+x_n),\ \forall n\geq 2$$

E_2) I $P(2)$: $A(x_1)A(x_2)=A(x_1+x_2)$ adev din ip

II C_p. $P(k)$ adev $\overset{(?)}{\Rightarrow}$ $P(k+1)$ adev unde

$P(k)$: $A(x_1)A(x_2)\cdots A(x_k)=A(x_1+x_2+\cdots+x_k)$

$P(k+1)$: $A(x_1)A(x_2)\cdots A(x_{k+1})=A(x_1+x_2+\cdots+x_{k+1})$

Știm că $P(k)$ adev $\Rightarrow A(x_1)A(x_2)\cdots A(x_k)=A(x_1+\cdots+x_k)\ \big|\cdot A(x_{k+1})$

$\Rightarrow A(x_1)\cdots A(x_{k+1})=A(x_1+\cdots+x_k)\cdot A(x_{k+1})\overset{ip}{=}$

$=A(x_1+x_2+\cdots+x_{k+1})\Rightarrow P(k+1)$ adev $\Rightarrow$

$\Rightarrow P(n)$ adev, $\forall n\geq 2$

E_3) $A\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right)A\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right)\cdots A\left(\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)=A\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{2016\cdot 2017}\right)$

E_4) $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{2016\cdot 2017}=\frac{1}{1}\left(\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{2017-2016}{2016\cdot 2017}\right)$

$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}\right)=1-\frac{1}{2017}=\frac{2016}{2017}$

E_5) Deci, $A\left(\frac{2016}{2017}\right)=A\left(\frac{a}{a+1}\right)\Rightarrow \frac{2016}{2017}=\frac{a}{a+1}\Rightarrow 2016a+2016=2017a$

$\Rightarrow \boxed{a=2016}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016
V8/II/1a)

Fie $f = X^4 + mX^2 + 2$, $m \in \mathbb{R}$

$m = ?$ dacă $f(1) = 0$

E1/ $f(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + m + 2 = 0 \Leftrightarrow m = -3$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^4 + mX^2 + 2$

Se cere $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_3x_4) = 0$

E1) din VIETE $\Rightarrow S_1 = -\frac{b}{a} = 0$

$$S_2 = \frac{c}{a} = m$$

$$S_3 = -\frac{d}{a} = 0$$

$$S_4 = \frac{e}{a} = 2$$

E2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = S_1^2 - 2S_2 = 0 - 2m = -2m$

E3) $x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_3x_4 = S_2 = m$

E4) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2(x_1x_2 + \dots + x_3x_4) =$

$$= -2m + 2 \cdot m = 0$$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2016
U8/Ex1 c)

Fie $f = X^4 + mX^2 + 2$, $m \in \mathbb{R}$

Ab $m = 3$, descomp în factori ireductibili în $\mathbb{R}[X]$

E1) $m = 3 \Rightarrow f = X^4 + 3X^2 + 2$

E2) $f = X^4 + X^2 + 2X^2 + 2 = X^2(X^2+1) + 2(X^2+1) =$

$= (X^2+1)(X^2+2)$

E3) At $X^2+1 \Rightarrow \Delta = 0 - 4 = -4 < 0 \Rightarrow X^2+1$ ireduct peste $\mathbb{R}[X]$

At $X^2+2 \Rightarrow \Delta = 0 - 8 = -8 < 0 \Rightarrow X^2+2$ ireduct. peste $\mathbb{R}[X]$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ 11/2016 VIII (a)

E1) $f'(x) = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} =$

$\sqrt{x^2+1}$

$= \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} =$

$= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

Prof. Ovidiu Bădescu

IV/1/2016

Fie $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, să se arate că $f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, V8/III/16)

să se scr ec. tg în $x=0$

E_1) ec. tg este: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$, în cazul nostru: $y-f(0)=f'(0)(x-0)$

E_2) $f(0)=\frac{0}{\sqrt{0+1}}=0$; $f'(0)=\frac{1}{1\cdot 1}=1$

$\Rightarrow$ ec. tg: $y-0=1(x-0) \Leftrightarrow y=x$

Prof. Ovidiu Badescu

XVII/2016

Fie $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, se știe că $f'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$, III, c)

arătați că $\forall a\in(-1;1)$, ec. $f(x)=a$ are soluție unică pe $\mathbb{R}$

$E_1)$ $f(x)=a \Leftrightarrow f(x)-a=0 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-a=0$

$E_2)$ Fie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-a$, vom arăta că ec. $g(x)=0$ are soluție unică pe $\mathbb{R}$

$E_3)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-a\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-a\right)$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-a\right)=-1-a$

și cum $-1<a<1 \mid\cdot(-1) \Rightarrow -1<-a<1 \mid -1 \Rightarrow -2<-1-a<0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} g(x)<0$

$E_4)$ $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-a\right)=1-a>0, \forall a\in(-1;1)$

$E_5)$ g continuă

$\left(\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to\infty} g(x)\right)<0$ $\Rightarrow$ ec $g(x)=0$ are cel puțin o soluție $\in(-1;1)$

$E_6)$ $g'(x)=(f(x)-a)'=f'(x)-0=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0$

$\Rightarrow g$ s↗ $\Rightarrow$ soluția e unică pe $\mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2016
V8/III/(2.)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x(x-1)$

Se cere $\int_0^2 f(x)e^{-x}dx=0$

E1) $I=\int_0^2 e^x(x-1)e^{-x}dx=\int_0^2 e^x(x-1)\frac{1}{e^x}dx=$

$=\int_0^2 (x-1)dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^2-x\Big|_0^2=\frac{1}{2}(4-0)-(2-0)$

$=2-2=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016

Fie $f(x)=e^x(x-1)$, arătați că aria V/8/III/2d)
dintre G_f, Ox, dreptele $x=1$ și $x=2$ este egală cu e

$E_1)$ $\mathcal{A}=\int_1^2 |f(x)|dx=\int_1^2 |e^x(x-1)|dx$

$E_2)$ $x\in[1;2] \Rightarrow x-1\geq 0$ și cum $e^x>0 \Rightarrow e^x(x-1)\geq 0$

$\Rightarrow \mathcal{A}=\int_1^2 e^x(x-1)dx$

$E_3)$ $f(x)=x-1 \Rightarrow f'(x)=1$

$g'(x)=e^x \Rightarrow g(x)=e^x$

$\mathcal{A}=e^x(x-1)\Big|_1^2-\int_1^2 e^x dx=$

$=e^2\cdot 1-e^1\cdot 0-e^x\Big|_1^2=$

$=e^2-0-(e^2-e)=e^2-e^2+e=e$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2016
VIII/(a c)

Fie $f(x)=e^x(x+1)$, arătați că

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{1}(f(x)+e^x)\,dx=0$$

E1) $I_n=\int_{-n}^{1}(xe^x-e^x+e^x)\,dx=\int_{-n}^{1}xe^x\,dx$

E2) $f(x)=x \Rightarrow f'(x)=1$

$g'(x)=e^x \Rightarrow g(x)=e^x$

$$I_n=xe^x\Big|_{-n}^{1}-\int_{-n}^{1}e^x\,dx=$$

$$=1e-(-n)e^{-n}-e^x\Big|_{-n}^{1}=$$

$$=e+\frac{n}{e^n}-(e^1-e^{-n})=e+\frac{n}{e^n}-e+\frac{1}{e^n}=$$

$$=\frac{n+1}{e^n}$$

E3) $\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{e^n}=0$ deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P(n)}{a^n}=0,\ \forall a>1$$

Prof. Ovidiu Bădescu