Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
VARA REZERVA, 2016
Matematică *M_mate-info*
Varianta 5

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real a, știind că numerele 24, 1020 și a sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+m$ este tangentă axei Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3}=27$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\ldots,\sqrt{25}\right\}$, acesta să fie număr rațional.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$, $B(-2,-1)$ și $C(2,3)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și este perpendiculară pe dreapta BC.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris unui triunghi ABC, în care $m(\sphericalangle A)=45^\circ$ și $BC=2\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay+a^2z=0\\ x-y+z=2\\ x+y-az=-4\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-1$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a, $a\neq-1$ și $a\neq\frac{1}{3}$.

5p **c)** Determinați numerele reale a, pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar $x_0=y_0$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-xy+2x+2y-2$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2-(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x*x=1$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere întregi astfel încât $m*n*p=2$, atunci produsul numerelor m, n și p este divizibil cu 2.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\ln x+1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x+\frac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are soluție unică în intervalul $(0,1)$.

2. Pentru fiecare număr natural n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+3}dx$.

5p **a)** Arătați că $I_0=1+3\ln\frac{3}{4}$.

5p **b)** Demonstrați că $I_{n+1}+3I_n=\frac{1}{n+2}$, pentru orice număr natural n.

5p **c)** Arătați că $\lim\limits_{n\to+\infty}nI_n=\frac{1}{4}$.

Mircea Bădescu

Găsiți a doua 24, 1020 și a sunt, în această ordine, în progr aritm

---

E_1) a, b, c în. a $\Leftrightarrow$ $a+c=2b$

E_2) În cazul nostru, $24+a=2\cdot 1020$

$\Rightarrow a=2040-24$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți $m \in \mathbb{R}$ dacă parabola $f(x) = x^2 + 4x + m$ este tangentă la Ox

---

$E_1)$ G_f tg la $Ox \Leftrightarrow \Delta = 0$

$E_2)$ în cazul nostru, $\Delta = 16 - 4m$

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 16 = 4m \Leftrightarrow m = 4$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$: $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3} = 27$

Mihaela/ICS
2/3

E_1) ec devine: $(3^{-1})^{2x-3} = 3^3 \Leftrightarrow 3^{-2x+3} = 3^3$

E_2) deoarece $f(x) = 3^x$ e injectivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow -2x+3 = 3 \Leftrightarrow -2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați probabilitatea ca alegând un număr din $A=\{\sqrt{1};\sqrt{2};\dots;\sqrt{25}\}$ acesta să fie număr rațional

---

$E_1)$ $P=\dfrac{\text{nr. caz favorab}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile: toate nr. din mț. A, adică 25

$E_3)$ nr. caz favorabile: toate nr. iraționale din A, adică $M=\{\sqrt{1};\sqrt{4};\sqrt{9};\sqrt{16};\sqrt{25}\}$ adică 5

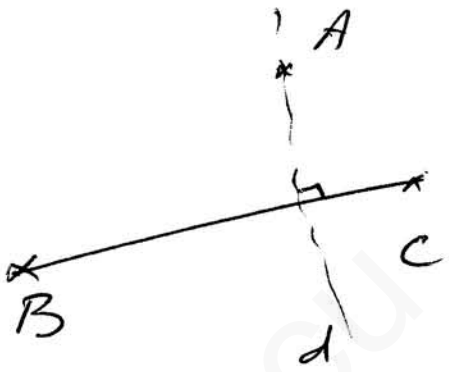
$E_4)$ $P=\dfrac{5}{25}=\dfrac{1}{5}$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2016/V1

Fie $A(0;1)$, $B(-2;-1)$, $C(2;3)$

Găsiți ec. dreptei d ce trece prin A și este perpendiculară pe BC



$E_1)$ $d \perp BC \Rightarrow m_d \cdot m_{BC} = -1$

$E_2)$ $m_{BC} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{3+1}{2+2} = 1$

$E_3)$ $m_d \cdot m_{BC} = -1 \Rightarrow m_d \cdot m_{BC} = -1 \Rightarrow m_d = -1$

$E_4)$ știm A, știm $m_d \Rightarrow$ ec. d este

$$y - y_A = m_d(x - x_A)$$

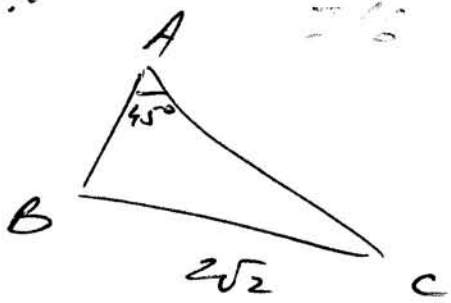
$$\Leftrightarrow y - 1 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = -x$$

$$\Leftrightarrow x + y - 1 = 0$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați R dacă $m(A)=45^\circ$ și

$BC=2\sqrt{2}$



E_1) din T. sinusurilor $\Rightarrow$

$$\frac{a}{\sin A}=2R \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}=2R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}=2R$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R=2}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$, arătați

că $\det(A(0)) = -1$

$E_1)\ \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+0-0-1-0 =$

$= -1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{pmatrix}$, arătați că

$A(a)$ este inversabilă, $\forall a\in\mathbb{R}$, $a\neq -1$ și $a\neq \frac{1}{3}$

E_1) $A(a)$ inversabilă $\Leftrightarrow \det A(a)\neq 0$

E_2) $\det(A(a))=\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = a+a+a^2+a^2-1+a^2$

$= 3a^2+2a-1$

E_3) $\det(A(a))=0 \Leftrightarrow 3a^2+2a-1=0$

$\Leftrightarrow a_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2\cdot 3}=\frac{-2\pm 4}{6}$ $\begin{cases} \frac{2}{6}=\frac{1}{3} \\ -\frac{6}{6}=-1 \end{cases}$

E_4) dar, noua ne trebuie $\det(A(a))\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{3};-1\}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $\begin{cases} x + ay + a^2 z = 0 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - az = -4 \end{cases}$

Găsiți $a \in \mathbb{R}$ dacă sistemul are soluție unică iar $x_0 = y_0$

E_1) sist are soluție unică $\Leftrightarrow$ det $S \neq 0$

E_2) $\det S = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -a \end{vmatrix} = a + a + a^2 + a^2 - 1 + a^2 =$

$= 3a^2 + 2a - 1$

E_3) $\det(A(a)) = 0 \Leftrightarrow a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2 \cdot 3} = \frac{-2 \pm 4}{6} \begin{matrix} \nearrow \frac{1}{3} \\ \searrow -1 \end{matrix}$

Și ca $\det(A(a)) \neq 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}; -1\}$

E_4) $\det(A(a)) \neq 0 \Rightarrow$ rezolvăm cu CRAMER

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & a & a^2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 1 & -a \end{vmatrix} = 0 - 4a + 2a^2 - 4a^2 - 0 + 2a^2 =$

$= -4a$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a^2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -4 & -a \end{vmatrix} = -2a + 0 - 4a^2 - 2a^2 - 0 + 4 =$

$= -6a^2 - 2a + 4$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 2a + 0 - 0 - 2 - 4a = -2a - 6$

E_5) $x = \frac{\Delta_x}{\det A} = \frac{-4a}{3a^2 + 2a - 1}$; $y = \frac{-6a^2 - 2a + 4}{3a^2 + 2a - 1}$; $z = \frac{-2a - 6}{3a^2 + 2a - 1}$

E_6) Condiția $x_0 = y_0 \Leftrightarrow -4a = -6a^2 - 2a + 4 \Leftrightarrow 6a^2 - 2a - 4 = 0 \mid :2$

$\Leftrightarrow 3a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2 \cdot 3} = \frac{1 \pm 5}{6} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3} \end{matrix} \Rightarrow \boxed{\{-\frac{2}{3}; 1\}}$

Prof. Ovidiu Băcescu

Fie $x * y = -xy + 2x + 2y - 2$, arătați că

$x * y = 2 - (x-2)(y-2), \forall x, y \in \mathbb{R}$

$\in_1$) $2 - (x-2)(y-2) = 2 - (xy - 2x - 2y + 4) =$

$= 2 - xy + 2x + 2y - 4 = -xy + 2x + 2y - 2 = x * y$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x * y = -xy + 2x + 2y - 2$, găsiți

$x \in \mathbb{R}$ dacă $x * x = 1$

E_1) $x * x = 1 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 2x - 2 = 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - 3 = 0 \mid \cdot(-1)$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

E_2) $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x*y=-xy+2x+2y-2$, știe că

$x*y=2-(x-2)(y-2)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ și că $*$ e asociativă.

Arătați că dacă $m,n,p\in\mathbb{Z}$ și $m*n*p=2$, atunci produsul lui m, n și p este divizibil cu 2

$E_1)$ $m*n*p=2 \Leftrightarrow \big(2-(m-2)(n-2)\big)*p=2$

$\Leftrightarrow 2-\big(2-(m-2)(n-2)-2\big)(p-2)=2$

$\Leftrightarrow (m-2)(n-2)(p-2)=0$

$\Leftrightarrow m-2=0$ sau

$n-2=0$ sau

$p-2=0$

$\Rightarrow m=2$ sau $p=2$ sau $p=2$

$E_2)$ deoarece <u>cel puțin</u> unul din numerele m, n sau p este 2 rezultă $(m\cdot n\cdot p)\vdots 2$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x) = e^x + \ln x + 1$, arătați că $f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$

E1) $f'(x) = e^x + \frac{1}{x} + 0$

$\rightarrow f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x) = e^x + \ln x + 1$, găsiți ec. tangentei la G_f în $x=1$ situată pe G_f

E_1) ec. tg în $x=1$ este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

E_2) $f(1) = e + \ln 1 + 1 = e + 1$

E_3) $f'(1) = ?$,

$f'(x) = e^x + \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = e + 1$

E_4) ec. tg este: $y - (e+1) = (e+1)(x-1)$

$\Leftrightarrow y - e - 1 = (e+1)x - e - 1$

$\Leftrightarrow y = (e+1)x$

Prof. Ovidiu Badescu

Arătați că ec. $f(x)=0$ are soluție unică în $(0;1)$ unde $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+\ln x+1$

E_1) încercăm să folosim că:

„ dacă f cont pe (a,b) și dacă $f(a)\cdot f(b)<0 \Rightarrow$ ec. $f(x)=0$ are cel puțin o soluție în (a,b).

Dacă în plus f este $\searrow$ mon $\Rightarrow$ soluția este unică "

E_2) $f(x)=e^x+\ln x+1$, $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (e^x+\ln x+1) \overset{1+(-\infty)+1}{=\!=\!=} -\infty < 0$

$f(1)=e+\ln 1+1 = e+1 > 0$

$\Rightarrow \left(\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)\right)\cdot f(1)<0$

f cont pe $(0;1)$

$\Rightarrow$ ec. $f(x)=0$ are cel puțin o soluție pe $(0;1)$

E_3) $f'(x)=e^x+\frac{1}{x}$ și cum $x\in(0;\infty)\to f\nearrow$

$\Rightarrow$ soluția este unică

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+3}\,dx$

Arătați că $I_0 = 1 + 3\ln\frac{3}{4}$

E1) $I_0 = \int_0^1 \frac{x^1}{x+3}\,dx = \int_0^1 \frac{x+3-3}{x+3}\,dx =$

$= \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{x+3}\right)dx = x\Big|_0^1 - 3\cdot \frac{\ln|x+3|}{1}\Big|_0^1 =$

$= (1-0) - 3(\ln 4 - \ln 3) = 1 - 3\ln\frac{4}{3} =$

$= 1 + 3\ln\left(\frac{4}{3}\right)^{-1} = 1 + 3\ln\frac{3}{4}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+3} dx$, arătați

că $I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} + 3I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x+3} dx + 3\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+3} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+2} + 3x^{n+1}}{x+3} dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x+3)}{x+3} dx =$$

$$= \frac{x^{n+2}}{n+2}\Big|_0^1 = \frac{1}{n+2} - \frac{0}{n+2} = \frac{1}{n+2}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

M11/2016/V5

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+3} dx$, arătați că

$\lim_{n\to\infty} n I_n = \frac{1}{4}$ știind că $I_{n+1} + 3I_n = \frac{1}{n+2}$

E_1) Studiem monot lui I_n

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{x+3} dx - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+3} dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)}{x+3} dx$$

E_2) Dar, $x \in [0,1] \Rightarrow x^{n+1} \geq 0$ și $x - 1 \leq 0$

$\Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$

E_3) Din $I_{n+1} \leq I_n \Rightarrow I_{n+1} + 3I_n \leq 4I_n$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{n+2} \leq 4I_n}$ (1)

E_4) Din $I_{n+1} \leq I_n \Rightarrow 4I_{n+1} \leq I_{n+1} + 3I_n$

$\Rightarrow 4I_{n+1} \leq \frac{1}{n+2} \Rightarrow \boxed{4I_n \leq \frac{1}{n+1}}$ (2)

E_5) Din (1) și (2) $\Rightarrow \frac{1}{n+2} \leq 4I_n \leq \frac{1}{n+1} \Big| \cdot \frac{n}{4}$

$\Rightarrow \frac{n}{4n+8} \leq nI_n \leq \frac{n}{4n+4}$ și cum $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{4n+8} = \frac{1}{4}$ și

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n+4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \lim_n nI_n = \frac{1}{4}$

Profesor Vidin Bădescu