Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

TOAMNA, 2016

Varianta 2

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=2016$ și rația $r=2$.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că punctul $A(1,2)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{4x-6}=4^{3x-4}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,40\}$, acesta să conțină cifra 4.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,2)$ și $B(4,5)$. Determinați ecuația dreptei AB.

5p **6.** Dacă $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x=\frac{4}{5}$, arătați că $\sin 2x=\frac{24}{25}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+ay+z=1\\ ax+y-z=-1\\ x+y-2z=0\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-2$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(a)$ este inversabilă, pentru orice număr real a, $a\neq -1$ și $a\neq 1$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a, pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), iar x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=3xy+3x+3y+2$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+3$. Demonstrați că $f(x\circ y)=f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale a, pentru care $\underbrace{a\circ a\circ\ldots\circ a}_{\text{de 2016 ori } a}=3^{2015}-1$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Demonstrați că funcția f este convexă pe $(1,+\infty)$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f'(2)+f'(3)+f'(4)+\ldots+f'(n)\right)=-\frac{3}{2}$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\sqrt{x}\,f(x)\,dx=\frac{5}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^{e^2}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)\ln x\,dx=4$.

5p **c)** Determinați numărul real a, $a>1$, știind că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ este egal cu $\pi\left(\ln a+\frac{7}{2}\right)$.

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți a_3 pt an progr aritm cu $a_1 = 2016$ și $r = 2$

E1) $a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow$

$\Rightarrow a_3 = 2016 + 2 \cdot 2 \Rightarrow a_3 = 2020$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți $m \in \mathbb{R}$ dacă $A(1;2) \in G_f$ unde $f(x) = x + m$

$E_1)$ $A(1;2) \in G_f \Leftrightarrow f(1) = 2 \Leftrightarrow 1 + m = 2$

$\Leftrightarrow m = 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$2^{4x-6} = 4^{3x-4}$$

E_1) ec. devine $2^{4x-6} = (2^2)^{3x-4} \Leftrightarrow$

$$2^{4x-6} = 2^{6x-8}$$

E_2) deoarece $f(x) = 2^x$ e injectivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow 4x - 6 = 6x - 8 \Leftrightarrow -2x = -2$

$\Leftrightarrow x = 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

Calculați probabilitatea ca alegând un nr. din $A=\{1;2;3;\dots;40\}$, acesta să conțină cifra 4.

$E_1)$ $P=\dfrac{\text{n. caz favorab}}{\text{n. caz posibile}}$

$E_2)$ <u>n. caz posibile</u>: toate elementele din mț. A adică 40 de elemente

$E_3)$ <u>n. caz favorabile</u>: toate numerele ce conțin cifra 4, adică: 4; 14; 24; 34; 40 $\Rightarrow$ 5 numere

$E_4)$ $P=\dfrac{5}{40}=\dfrac{1}{8}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(1;2)$, $B(4;5)$, să se scr ec. AB

E_1) ec AB: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 5 + 4y - 8 - 5x - y = 0$

$\Leftrightarrow -3x + 3y - 3 = 0 \mid :(-3)$

$x - y + 1 = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

Dacă $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ și $\sin x = \frac{4}{5}$,
arătați că $\sin 2x = \frac{24}{25}$

$E_1)$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$E_2)$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \frac{16}{25} + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{9}{25}$

$\Rightarrow \cos x = \pm \frac{3}{5}$

$E_3)$ dar, $x \in (0, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos x > 0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos x = \frac{3}{5}$

$E_4)$ $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{25}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, arătați

că $\det(A(0))=-2$

$E_1)$ $\det(A(0))=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-2+0+0-1+1-0=$

$=-2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $A(a)=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, arătați

că matricea $A(a)$ este inversabilă pentru

orice a cu $a\neq -1$ și $a\neq 1$

E_1) $A(a)$ inversabilă $\Leftrightarrow \det A(a)\neq 0$

E_2) $\det A(a)=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2-a+a-1+1+2a^2$

$=2a^2-2$

E_3) $\det A(a)\neq 0 \Leftrightarrow 2a^2-2\neq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a^2\neq 1 \Leftrightarrow a\neq 1$ și $a\neq -1$

$\Rightarrow \forall a\in \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ avem că $A(a)$ inversabilă

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016/V2
I c)

Fie $\begin{cases} x+ay+z=1 \\ ax+y-z=-1 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$

Găsiți numerele întregi a dacă sistemul are o soluție unică (x_0, y_0, z_0) iar x_0, y_0 și z_0 sunt numere întregi

---

E_1) sist are soluție unică $\Leftrightarrow \det A(a) \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -2-a+a-1+1+2a^2 \neq 0$

$\Leftrightarrow 2a^2-2 \neq 0 \Leftrightarrow a^2 \neq 1$

$\Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

E_2) $\det A \neq 0 \Rightarrow$ îl putem rezolva cu Cramer

$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -2+0-1-0+1-2a = -2a-2$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2-1+0+1+0+2a = 2a+2$

$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ -a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-a+a-1+1+0 = 0$

E_3) $x = \frac{\Delta_x}{\det A} = \frac{-2(a+1)}{2(a-1)(a+1)} = -\frac{1}{a-1}$; $y = \frac{2(a+1)}{2(a+1)(a-1)} = \frac{1}{a-1}$, $z = \frac{0}{\det A} = 0$

E_4) Toate componentele soluției sunt întregi $\Leftrightarrow a-1 \in D_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a-1 \in \{-1; 1\} \Leftrightarrow a \in \{0; 2\}$ care sunt din $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

Prof. Ovidiu Bănoșu

Fie $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$, arătați că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$

$E_1)$ $3(x+1)(y+1) - 1 = 3(xy + x + y + 1) - 1 =$

$= 3xy + 3x + 3y + 2 = x \circ y$

$\Rightarrow x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$ și

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 3$.

Arătați că $f(x \circ y) = f(x) f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$E_1)$ $f(x \circ y) = f(3xy + 3x + 3y + 2) = 3(3xy + 3x + 3y + 2) + 3 =$

$= 9xy + 9x + 9y + 9 \quad (1)$

$E_2)$ $f(x) f(y) = (3x + 3)(3y + 3) = 9xy + 9x + 9y + 9 \quad (2)$

$E_3)$ din (1) și (2) $\Rightarrow$ egalitate

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$, știe că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, determinați numerele reale a dacă $\underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{\text{de 2016 ori}} = 3^{2015} - 1$

$E_1)$ $a \circ a = 3(a+1)(a+1) - 1 \Rightarrow a \circ a = 3(a+1)^2 - 1$

$a \circ a \circ a = (3(a+1)^2 - 1) \circ a = 3(3(a+1)^2 + 1)(a+1) - 1$

$= 3^2 (a+1)^3 - 1$

Arătăm prin inducție că

$\underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{\text{de } n \text{ ori}} = 3^n (a+1)^n - 1, \forall n \geq 2$

$E_2)$ I $P(2)$: $a \circ a = 3^2 (a+1)^2 - 1$ adev

II $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. $P(k)$ adev. $\overset{(?)}{\Rightarrow} P(k+1)$ adev unde

$P(k)$: $\underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{k \text{ ori}} = 3^{k-1} (a+1)^k - 1$

$P(k+1)$: $\underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{(k+1) \text{ ori}} = 3^k (a+1)^{k+1} - 1$

Știm că $P(k)$ adev $\Rightarrow \underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{k \text{ ori}} = 3^{k-1} (a+1)^k - 1 \,/\circ_1 a$

$\Rightarrow \underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{(k+1) \text{ ori}} = (3^{k-1} (a+1)^k - 1) \circ a = 3(3^{k-1} (a+1)^k - 1 + 1)(a+1) - 1 =$

$= 3^k (a+1)^k (a+1) - 1 = 3^k (a+1)^{k+1} - 1$

$\Rightarrow P(k+1)$ adev $\Rightarrow P(n)$ adev., $\forall n \geq 2$

$E_3)$ $\underbrace{a \circ a \circ \ldots \circ a}_{\text{de } n \text{ ori}} = 3^{n-1} (a+1)^n - 1 \Rightarrow$ se devine

$3^{2015} (a+1)^{2016} - 1 = 3^{2015} - 1 \Leftrightarrow 3^{2015} (a+1)^{2016} = 3^{2015} \Rightarrow$

$(a+1)^{2016} = 1 \Rightarrow a+1 \in \{\pm 1\} \Rightarrow a \in \{0; -2\}$

Prof. Ovidiu Băăescu

Fie $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$, arătați că

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}, \forall x \in (1, \infty)$$

$E_1)$ $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1} = \ln(x+1) - \ln(x-1)$

$E_2)$ $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$, $f:(1;\infty)\to\mathbb{R}$. Se știe că $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$, arătați că f este convexă pe $(1;\infty)$

$E_1)$ $f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\Rightarrow f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x-1)^2}$

$$f''(x)=\frac{-(x-1)^2+(x+1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2}=\frac{-x^2+2x-1+x^2+2x+1}{(x+1)^2(x-1)^2}=$$

$$=\frac{4x}{(x+1)^2(x-1)^2}$$

$E_2)$ $f''(x)=0\Leftrightarrow 4x=0\Leftrightarrow x=0\notin D_f$

x	$(1$		$\infty)$
f''	$+$	$+$	$+$
f		$\cup$	

$f''(2)=\frac{8}{9\cdot 1}>0\Rightarrow f''(x)>0,\ \forall x\in(1;\infty)\Rightarrow$

$\Rightarrow f$ CONVEXĂ pe $(1;\infty)$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$, se știe că

$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}$, demonstrați că

$$\lim_{n\to\infty}\left(f'(2)+f'(3)+\dots+f'(n)\right)=-\frac{3}{2}$$

E1) $f'(2)=\frac{1}{3}-\frac{1}{1}$

$f'(3)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}$

$f'(4)=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}$

$\dots\dots\dots\dots$

$f'(n)=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}$

$$S=-1-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=-\frac{3}{2}+\frac{2n+1}{n(n+1)}$$

E2) $\lim_{n\to\infty} S=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{2}+\frac{2n+1}{n^2+n}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{3}{2}+\frac{n(2+\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n})}\right)=-\frac{3}{2}+0=-\frac{3}{2}$$

($\frac{1}{n}\to 0$)

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

Arătați că $\int_1^2 \sqrt{x}\,f(x)\,dx=\frac{5}{2}$

$E_1)$ $\int_1^2 \sqrt{x}\cdot f(x)\,dx=\int_1^2 \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx=$

$=\int_1^2 (x+1)\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_1^2+x\Big|_1^2=\frac{4-1}{2}+(2-1)=$

$=\frac{3}{2}+1=\frac{5}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$, arătați că $\int_1^{e^2}(f(x)-\sqrt{x})\ln x\,dx=4$

$E_1)$ $I=\int_1^{e^2}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)\ln x\,dx=$

$=\int_1^{e^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\ln x\,dx$

$E_2)$ not $t=\sqrt{x}\ |()'\Rightarrow dt=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2dt$

Cum $t=\sqrt{x}\Rightarrow x=t^2$

$E_3)$ $x=1\Rightarrow t=\sqrt{1}\Rightarrow t=1$

$x=e^2\Rightarrow t=\sqrt{e^2}\Rightarrow t=e$

$I=\int_1^e \ln t^2\cdot 2\,dt=2\int_1^e 2\ln t\,dt=4\int_1^e \ln t\,dt$

$E_4)$ fie $f=\ln t\Rightarrow f'=\frac{1}{t}$

$g'=1\Rightarrow g=t$

$I_1=\int_1^e \ln t\,dt=t\ln t\Big|_1^e-\int_1^e \frac{1}{t}\cdot t\,dt=$

$=e\ln e-1\ln 1-t\Big|_1^e=e-0-(e-1)=1$

$E_5)$ $I=4I_1=4$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$, găsiți $a\in\mathbb{R}, a>1$ dacă volumul corpului obținut prin rotație în jurul lui Ox a G_g, $g:[1;a]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$, este egal cu $\pi(\ln a+\frac{7}{2})$

$E_1)$ $V(C_g)=\pi\int_a^b g^2(x)dx=\pi\int_1^a\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2dx=$

$=\pi\int_1^a\left(x+2+\frac{1}{x}\right)dx=\pi\left(\frac{x^2}{2}\Big|_1^a+2x\Big|_1^a+\ln x\Big|_1^a\right)=$

$=\pi\left(\frac{a^2-1}{2}+2(a-1)+\ln a\right)$

$E_2)$ $V=\pi(\ln a+\frac{7}{2})\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a^2-1}{2}+2(a-1)+\ln a=\ln a+\frac{7}{2}\quad|\cdot 2$

$\Rightarrow a^2-1+4(a-1)=7$

$\Leftrightarrow a^2+4a-12=0$

$a_{1,2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+48}}{2\cdot 1}=\frac{-4\pm 8}{2}\begin{matrix}2\\-6\end{matrix}$

$E_3)$ Dar, $a>1\Rightarrow \boxed{a=2}$

Prof. Ovidiu Bădescu