Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 01

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SESIUNE SPECIALA, 2016

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați al patrulea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1=1$ și $a_2=4$.

5p **2.** Determinați numărul real a, știind că punctul $A(1,a)$ aparține graficului funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^{x-2}=3^{2-x}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie mai mic sau egal cu 30.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,3)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul A și are panta egală cu 1.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=10$, $AC=10$ și $BC=12$. Arătați că $\sin B=\frac{4}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}-m & 1 & 1\\ 1 & -m & 1\\ 1 & 1 & -m\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}-mx+y+z=-1\\ x-my+z=-1\\ x+y-mz=m\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=2$.

5p **b)** Demonstrați că matricea $A(m)$ este inversabilă, pentru orice număr real m, $m\neq -1$ și $m\neq 2$.

5p **c)** Pentru $m=2$, determinați soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului pentru care $x_0+2y_0+3z_0=9$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=-2xy+10x+10y-45$.

5p **a)** Arătați că $x*y=-2(x-5)(y-5)+5$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10=5$.

5p **c)** Determinați numerele naturale m și n, pentru care $m*n=27$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-2)(x+2)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

5p **c)** Demonstrați că ecuația $f(x)=0$ are două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcția $f:(4,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x-4)}$.

5p **a)** Arătați că $\int_5^{10}(x-4)f(x)dx=\ln 2$.

5p **b)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[5,6]\to\mathbb{R}$, $g(x)=xf(x)$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(n^2\int_n^{n+1}f(x)dx\right)=1$.

Prof. Ovidiu Bădescu

M11/2016
V 1/I71

Determinați a_4 dacă an progresie aritm cu $a_1=1$, $a_2=4$

$E_1)$ $a_n=a_1+(n-1)r \Rightarrow a_2=a_1+r \Rightarrow$

$\Rightarrow 4=1+r \Rightarrow r=3$

$E_2)$ $a_4=a_1+(4-1)r \Rightarrow a_4=1+3\cdot 3 \Rightarrow a_4=10$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016
V1/I/2

Găsiți $a \in \mathbb{R}$ dacă $A(1;a) \in G_f$ unde $f(x) = x^2 + 4$

$\in$) $A(1;a) \in G_f \Leftrightarrow f(1) = a \Leftrightarrow 1 + 4 = a$

$\Leftrightarrow \boxed{a = 5}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016
V1/I/3

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$9^{x-2} = 3^{2-x}$$

E_1) deoarece $9 = 3^2 \Rightarrow$ ec. devine

$$(3^2)^{x-2} = 3^{2-x} \Leftrightarrow 3^{2x-4} = 3^{2-x}$$

E_2) deoarece $f(x) = 3^x$ injectivă $\Rightarrow$

$$2x - 4 = 2 - x \Leftrightarrow 3x = 6 \Rightarrow \boxed{x = 2}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016
V1/II/4

Calculați probabilitatea ca alegând un nr. de 2 cifre, acesta să fie mai mic sau egal cu 30

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile: toate nr. naturale de 2 cifre

$\overline{ab}$ cu $a \to 9$ v
$b \to 10$ v
cinci

$\Big\} \to 90$ numere

$E_3)$ nr. caz favorabile: toate elem. din mulțimea

$M = \{10; 11; \dots; 30\} \to$ sunt în progr. aritm. cu

$a_1 = 10,\ a_n = 30,\ r = 1 \Rightarrow a_n = a_1 + (n-1)r$

$\Rightarrow 30 = 10 + (n-1) \Rightarrow n = 21$

$E_4)$ $P = \dfrac{21^{(3}}{90} = \dfrac{7}{30}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016
V1/I/5

Fie $A(0;3)$, să se scr. ec. dreptei ce trece prin A și are panta 1

$\in$) $y - y_A = m(x - x_A) \Rightarrow y - 3 = 1(x - 0)$

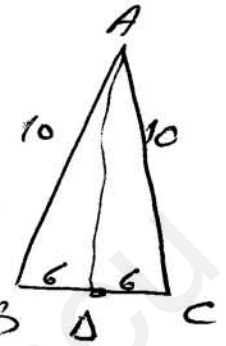
$\Rightarrow y = x + 3$

Prof. Ovidiu Bădescu

M11/2016
VII/I/6

Fie ΔABC cu $AB=10$, $AC=10$ și $BC=12$.

Se cere $\sin B=\frac{4}{5}$



met I (în cazul ăsta, nu e generală)

G) ΔABC isoscel, fie $AD\perp BC \Rightarrow AD$ mediană

E2) în ΔABD $\xrightarrow{T.Pitag}$ $AB^2=AD^2+BD^2$

$\Rightarrow 100=AD^2+36 \Rightarrow AD^2=64 \Rightarrow AD=8$

E3) $\sin B=\frac{AD}{AB}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

---

met II (generală)

E1) în ΔABC $\xrightarrow{T.cos}$ $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot \cos B$

$\Rightarrow 100=100+144-2\cdot 10\cdot 12\cdot \cos B$

$\Rightarrow 240\cos B=144 \Rightarrow \cos B=\frac{144}{240}\overset{(12}{=}\frac{12}{20}\overset{(4}{=}\frac{3}{5}$

E2) Dar, $\sin^2 B+\cos^2 B=1 \Rightarrow \sin^2 B+\frac{9}{25}=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin^2 B=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25} \Rightarrow \sin B=\pm\frac{4}{5}$

Dar, $B\in(0,\pi) \Rightarrow \sin B>0 \Rightarrow \sin B=\frac{4}{5}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016

V1/II/1a)

Fie $A(m)=\begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$, arătați că $\det(A(0))=2$

E1) $\det(A(0))=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0+1+1-0-0-0=$

$=2$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016
V1/II/16)

Fie $A(m)=\begin{pmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{pmatrix}$, arătați că

$A(m)$ inversabilă, $\forall m\neq -1$ și $m\neq 2$

met I

E1) $\det A(m)=\begin{vmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix}$ $l_3+l_2+l_1\to l_1$

$=\begin{vmatrix} -m+2 & -m+2 & -m+2 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix}=(-m+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix}=$

$=(-m+2)(m^2+1+1+m+m-1)=(-m+2)(m^2+2m+1)=$

$=(-m+2)(m+1)^2$

E2) $\det(A(m))\neq 0\Leftrightarrow(-m+2)(m+1)^2\neq 0\Leftrightarrow$ $m\neq -1$ și $m\neq 2$.

met II

E1) $\det(A(m))=\begin{vmatrix} -m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & 1 & -m \end{vmatrix}=-m^3+1+1+m+m+m=$

$=-m^3+3m+2$

E2) deci $\det A(m)=0\Leftrightarrow -m^3+3m+2=0\mid\cdot(-1)$

$\Leftrightarrow m^3-3m-2=0$

	m^3	m^2	m	m^0
	1	0	−3	−2
−1	1	−1	−2	−4≠0
2	1	2	1	0 ok

$\Rightarrow(m-2)(m^2+2m+1)=0$

$\Rightarrow(m-2)(m+1)^2=0$. Deci, $\det A(m)\neq 0\Leftrightarrow m\neq 2$ și $m\neq -1$

Prof. Ovidiu Badescu

M1/2016
V1/II/10)

Fie $\begin{cases} -mx+y+z=-1 \\ x-my+z=-1 \\ x+y-mz=m \end{cases}$. Dacă $m=2$, găsiți soluția (x_0,y_0,z_0) a sistemului cu $x_0+2y_0+3z_0=9$

E1) $m=2 \Rightarrow \begin{cases} -2x+y+z=-1 \\ x-2y+z=-1 \\ x+y-2z=2 \end{cases}$

E2) $\det S=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-8+1+1+2+2+2=0$

$\Rightarrow$ nu pot aplica regula lui Cramer

E3) rang $A=?$, $|-2|=-2\neq 0 \Rightarrow \text{rang } A\geq 1$, bordăm

$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=4-1=3\neq 0 \Rightarrow \text{rang } A\geq 2$, bordăm

$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=\det S=0 \Rightarrow \text{rang } A=2$ și

$\Delta_p=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$

E4) există un singur minor caracteristic $\Delta_c=\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

$=8-1-1-2-2-2=0$

$\Rightarrow$ sist compatibil

E5) sist principal $\begin{cases} -2x+y=-1-\alpha \\ x-2y=-1-\alpha \end{cases} \Big| \cdot 2$ și $\boxed{z=\alpha}$

"+": $-3y=-3(1+\alpha) \Rightarrow \boxed{y=1+\alpha}$, înlocuim

$\Rightarrow x-2(1+\alpha)=-1-\alpha \Rightarrow \boxed{x=1+\alpha}$

E6) $x_0+2y_0+3z_0=9 \Rightarrow 1+\alpha+2(1+\alpha)+3\alpha=9 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow$

soluția $\boxed{(2;2;1)}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016
V1/II/2a)

Fie $x * y = -2xy + 10x + 10y - 45$.

Arătați că $x * y = -2(x-5)(y-5) + 5$

Ex) $-2(x-5)(y-5)+5 = -2(xy - 5x - 5y + 25) + 5 =$

$= -2xy + 10x + 10y - 50 + 5 =$

$= -2xy + 10x + 10y - 45 = x * y$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016
VI/II/25

Fie $x*y=-2xy+10x+10y-45$ asociativă, știe că: $x*y=-2(x-5)(y-5)+5$, arătați că

$1*2*3*4*5*6*7*8*9*10=5$

E_1) din $x*y=-2(x-5)(y-5)+5 \Rightarrow$

$x*5=-2(x-5)\cdot 0+5 \Rightarrow x*5=5, \forall x\in\mathbb{R}$

$5*y=-2\cdot 0(y-5)+5 \Rightarrow 5*y=5, \forall y\in\mathbb{R}$

E_2) $N=1*2*\ldots*10 \overset{*\text{ asociativă}}{=\!=\!=}$

$=(\underbrace{1*2*3*4}_{x})*5*(6*_*10) \overset{x*5=5}{=\!=\!=}$

$=5*(\underbrace{6*_*10}_{y}) \overset{5*y=5}{=\!=\!=}$

$=5$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016
V1/II/2c)

Fie $x*y=-2xy+10x+10y-45$, se știe că $x*y=-2(x-5)(y-5)+5$, găsiți numerele naturale m,n dacă $m*n=27$

$E_1)$ din $x*y=-2(x-5)(y-5)+5 \Rightarrow$

$m*n=-2(m-5)(n-5)+5$

$E_2)$ ec. devine $-2(m-5)(n-5)+5=27 \Leftrightarrow$

$-2(m-5)(n-5)=22 \mid :(-2)$

$\Leftrightarrow (m-5)(n-5)=-11$

$E_3)$ cum 11 nr prim și $m,n \in \mathbb{N}$ $\Big\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} m-5=-11 \\ n-5=1 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} m-5=-1 \\ n-5=11 \end{cases} \text{ sau } \begin{cases} m-5=1 \\ n-5=-11 \end{cases}$$

$$\text{sau } \begin{cases} m-5=11 \\ n-5=-1 \end{cases}$$

$E_4)$ $\begin{cases} m=-6 \\ n=6 \end{cases}$ sau $\begin{cases} m=4 \\ n=6 \end{cases}$ sau $\begin{cases} m=6 \\ n=-6 \end{cases}$ sau $\begin{cases} m=16 \\ n=4 \end{cases}$

Cum $m,n \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} m=4 \\ n=6 \end{cases}$ sau $\begin{cases} m=16 \\ n=4 \end{cases}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016
V1/III/1a)

Fie $f(x)=x^2-8\ln x$, arătați că

$$f'(x)=\frac{2(x-2)(x+2)}{x}$$

Ex) $f'(x)=2x-8\cdot\frac{1}{x}=\frac{2x^2-8}{x}=\frac{2(x^2-4)}{x}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{2(x-2)(x+2)}{x}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016
V1/III/16)

Fie $f(x) = x^2 - 8\ln x$, x știi că

$$f'(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{x}, \quad x \in (0;\infty).$$

Determinați intervalele de monotonie ale lui f

$E_1)$ $f'(x) = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow$ $\begin{cases} x = 2 \\ \text{sau} \\ x = -2 \notin D_f \end{cases}$

$E_2)$

x	0		2	
f'	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nexists$	$\searrow$	min	$\nearrow$

$f'(1) = \frac{2\cdot(-1)\cdot 3}{1} < 0 \Rightarrow f'(x) \leq 0$ pe $(0;2] \Rightarrow$

$\Rightarrow f \searrow$ pe $(0;2]$

$f'(3) = \frac{2\cdot 1\cdot 5}{3} > 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$ pe $[2;\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow f \nearrow$ pe $[2;\infty)$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016
V1/III/1c)

Fie $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8\ln x$

Se știe că $f'(x)=\frac{2(x-2)(x+2)}{x}$, arătați că ecuația $f(x)=0$ are două soluții reale distincte

---

E_1) Folosim șirul lui Rolle

$$f'(x)=0 \Rightarrow (x-2)(x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ \text{sau} \\ x=-2 \notin D_f \end{cases}$$

E_2)

x	$(0$		2		∞
f'	//	−	0	+	
f	//	∞	$4(1-\ln 4)$		∞

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} (x^2-8\ln x) \overset{0-8\ln 0}{=\!=\!=} \infty$$
$$0+\infty$$

$$f(2)=4-8\ln 2=4(1-2\ln 2)=4(1-\ln 4)=$$

$$=4(\ln e-\ln 4)<0 \text{ deoarece}$$

$e=3,7<4$ și baza este $b>1$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}(x^2-8\ln x) \overset{\infty-\infty}{=\!=\!=} \lim_{x\to\infty} x\left(x-8\cdot\frac{\ln x}{x}\right)$$

$$\overset{\infty(\infty-8\cdot 0)}{=\!=\!=} \infty \text{ (deoarece s-a folosit}$$

limita remarcabilă $\lim\limits_{x_n\to\infty}\frac{\ln x_n}{x_n}=0$)

E_3) șirul lui Rolle este $(+;-;+)$ $\Rightarrow$ ec. $f(x)=0$ are două soluții reale distincte

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f(x)=\frac{1}{x(x-4)}$, arătați că

M1/2016
V1/III/2a)

$$\int_5^{10}(x-4)f(x)dx=\ln 2$$

$$I=\int_5^{10}(x-4)\cdot\frac{1}{x(x-4)}dx=\int_5^{10}\frac{1}{x}dx=$$

$$=\ln|x|\Big|_5^{10}=\ln 10-\ln 5=$$

$$=\ln\frac{10}{5}=\ln 2$$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016
V1/III/26

Fie $f(x)=\frac{1}{x(x-4)}$, determinați volumul corpului obținut prin rotație în jurul lui Ox a G_g unde $g:[5;6]\to\mathbb{R}$, $g(x)=x\cdot f(x)$

$E_1)$ $V=\pi\int_5^6 g^2(x)\,dx$

$E_2)$ $g(x)=x\cdot\frac{1}{x(x-4)}=\frac{1}{x-4}$

$E_3)$ $V=\pi\int_5^6\left(\frac{1}{x-4}\right)^2dx=\pi\int_5^6(x-4)^{-2}dx=$

$=\pi\cdot\frac{(x-4)^{-2+1}}{-2+1}\Big|_5^6=\pi\cdot\left(-\frac{1}{x-4}\Big|_5^6\right)=$

$=-\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{2/1}{1}\right)=-\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

M1/2016
VI/III/2c)

Fie $f(x)=\frac{1}{x(x-4)}$, arătați că

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^2\int_n^{n+1} f(x)\,dx\right)=1$$

E1) $I=\int_n^{n+1}\frac{1}{x^2-4x}\,dx \overset{\text{forma canonică}}{=\!=\!=} \int_n^{n+1}\frac{1}{1/(x-2)^2-4}\,dx$

$$=\frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2-2}{x-2+2}\right|\Bigg|_n^{n+1}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-4}{x}\right|\Bigg|_n^{n+1}=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\ln\frac{n-3}{n+1}-\ln\frac{n-4}{n}\right)=\frac{1}{4}\ln\frac{\frac{n-3}{n+1}}{\frac{n-4}{n}}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{n-3}{n+1}\cdot\frac{n}{n-4}=\frac{1}{4}\ln\frac{n^2-3n}{n^2-3n-4}$$

E2) $l=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{1}{4}\ln\frac{n^2-3n}{n^2-3n-4}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n^2-3n}{n^2-3n-4}\right)^{n^2}=$

$$=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{n^2-3n}{n^2-3n+4}-1\right)^{n^2}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{4}{n^2-3n+4}\right)^{n^2}$$

$$=\frac{1}{4}\ln\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{4}{n^2-3n+4}\right)^{\frac{n^2-3n+4}{4}}\right]^{\frac{4}{n^2-3n+4}\cdot n^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\ln e^{\lim_{n\to\infty}\frac{4n^2}{n^2-3n+4}}=\frac{1}{4}\cdot\ln e^4=1$$

Prof. Ovidiu Bădescu