Examenul de bacalaureat național 2016
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Clasa a XII-a

Simulare

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați numerele reale a și b, știind că $(a+b)(i+1)=(a-b+1)(i-1)$, unde $i^2=-1$.

5p **2.** Determinați numerele reale m, pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx+1$ are valoarea minimă egală cu -3.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3 x=\log_x 3$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă ambele cifre pătrate perfecte.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,a)$, $B(0,-3)$ și $C(1,1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că $AB+BC=AC$.

5p **6.** Determinați $a\in(0,\pi)$, știind că $\left(\sin\frac{\pi}{7}-\cos a\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{7}-\sin a\right)^2=2$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m)=\begin{pmatrix}2 & 1 & m\\ m & m & 1\\ 1 & m & 1\end{pmatrix}$, unde m este număr real.

5p **a)** Calculați $\det(A(1))$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m, pentru care matricea $A(m)$ este inversabilă.

5p **c)** Rezolvați ecuația matriceală $X\cdot A(0)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, unde $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-4x-4y+20$.

5p **a)** Arătați că $x*y=(x-4)(y-4)+4$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Calculați $1*2*3*\ldots*2016$.

5p **c)** Determinați numerele naturale a, b și c, știind că $a<b<c$ și $a*b*c=66$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$.

5p **a)** Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **b)** Determinați coordonatele punctului situat pe graficul funcției f, în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu axa absciselor.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f(1)+f(2)+\ldots+f(n)\right)^n$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

5p **a)** Calculați $\int_2^4\frac{1}{\ln x}f(x)\,dx$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e\frac{f(x)}{x}\,dx=1-\frac{2}{e}$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_1^e\frac{f(x)}{x^n}\,dx=0$.

Profesorul Badescu

Găsiți a și b reale dacă

$$(a+b)(i+1)=(a-b+1)(i-1)$$

E1) $ai+a+bi+b=ai-a-bi+b+i-1$

$$2bi-i+2a+1=0$$

E2) $2a+1+(2b-1)i=0$

$a,b\in\mathbb{R}\Rightarrow\begin{cases}2a+1\in\mathbb{R}\\2b-1\in\mathbb{R}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2a+1=0\\2b-1=0\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{1}{2}\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

$m = ?$ dacă $f(x) = x^2 - mx + 1$ are valoarea minimă egală cu -3

$E_1)$ $a = 1 > 0 \Rightarrow f$ are un minim egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$

$E_2)$ $-\frac{\Delta}{4a} = -3 \Rightarrow -\frac{m^2 - 4}{4 \cdot 1} = -3 \mid \cdot (-1)$

$\Rightarrow m^2 - 4 = 12 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați în $\mathbb{R}$:

$$\log_3 x = \log_x 3$$

E_1) Cond: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow x \in (0;1) \cup (1;\infty) = I_c$

E_2) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a} \Rightarrow$ ec. devine

$$\log_3 x = \frac{1}{\log_3 x} \Rightarrow (\log_3 x)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \log_3 x = \pm 1$$

E_3) $\log_3 x = 1 \Rightarrow x = 3^1 \Rightarrow x = 3 \in I_c$

$\log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \in I_c$

$S_f : x \in \{\frac{1}{3}; 3\}$

Prof. Ovidiu Badescu

V/140

Găsiți probabilitatea ca alegând un nr. din mț numerelor de 2 cifre, acestea să aibe ambele cifre pătrate perfecte

---

$E_1)$ $P = \dfrac{\text{nr. caz favorabile}}{\text{nr. caz posibile}}$

$E_2)$ nr. caz posibile : toate nr. de 2 cifre de forma $\overline{ab}$ cu $\begin{matrix} a \to 9\text{v} \\ b \to 10\text{v} \\ \text{indep} \end{matrix}\Big\} \to 90$ numere

$E_3)$ nr. caz favorabile: $\overline{ab}$ cu a, b pătrat perfect

$a \in \{1; 4; 9\} \to a \to 3\text{v}$

$b \in \{0; 1; 4; 9\} \to b \to 4\text{v}$

indep

$3 \cdot 4 = 12$

$E_4)$ $P = \dfrac{12^{\backslash 2}}{90} = \dfrac{6^{\backslash 3}}{45} = \dfrac{2}{15}$

Prof. Ovidiu Băcescu

V140
2/5

Fie $A(-1;a)$, $B(0;-3)$, $C(1;1)$, să se afle $a=?$ dacă $AB+BC=AC$

mod I:

E_1) dacă A,B,C necoliniare $\Leftrightarrow AC<AB+BC$

$\Rightarrow$ pt ca $AB+BC=AC \Rightarrow A,B,C$ coliniare în ordinea $A-B-C$

E_2) A,B,C coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = 0$

E_3) $\begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3+a+0+3+1-0=0$

$a+7=0$

$\Rightarrow \boxed{a=-7}$

mod II:

E_1) $AB+BC=AC \Rightarrow \sqrt{1^2+(-3-a)^2}+\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{4+(1-a)^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{10+6a+a^2}+\sqrt{17}=\sqrt{5-2a+a^2} \quad |()^2$

E_2) $10+6a+a^2+2\sqrt{17(a^2+6a+10)}+17=a^2-2a+5$

$2\sqrt{17(a^2+6a+10)} = -8a-22 \quad |:2 \Rightarrow \sqrt{17(a^2+6a+10)}=-4a-1$

E_3) $\overset{()^2}{\Rightarrow} 17a^2+102a+170=16a^2+88a+121$

$a^2+14a+49=0 \Rightarrow a_{1,2}=\frac{-14\pm\sqrt{196-196}}{2\cdot 1}=-7$

sol posibilă

E_4) înlor în ec inițiale: $\sqrt{1^2+4^2}+\sqrt{1^2+4^2}=\sqrt{4+8^2}$

$2\sqrt{17}=\sqrt{68}$ adev $\Rightarrow a=-7$ soluție

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți $a \in (0; \pi)$ dacă

$$\left(\sin\frac{\pi}{7} - \cos a\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{7} - \sin a\right)^2 = 2$$

E_1) $\left(\sin^2\frac{\pi}{7} - 2\sin\frac{\pi}{7}\cos a + \cos^2 a\right) + \left(\cos^2\frac{\pi}{7} - 2\cos\frac{\pi}{7}\sin a + \sin^2 a\right) = 2$

E_2) $\left(\sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7}\right) - 2\left(\sin\frac{\pi}{7}\cos a + \cos\frac{\pi}{7}\sin a\right) + \left(\cos^2 a + \sin^2 a\right) = 2$

E_3) dar, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{7} + a\right) + 1 = 2$

E_4) $\sin\left(\frac{\pi}{7} + a\right) = 0$, cum $0 \in [-1; 1]$

$\frac{\pi}{7} + a \in \{\arcsin 0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \arcsin 0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$\frac{\pi}{7} + a \in \{0 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$a \in \{-\frac{\pi}{7} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{6\pi}{7} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

E_5) care soluții $\in (0; \pi)$

$k = -1 \Rightarrow a \in \{-\frac{\pi}{7} - 2\pi; \frac{6\pi}{7} - 2\pi\} \cap (0; \pi) = \emptyset$

$k = 0 \Rightarrow a \in \{-\frac{\pi}{7}; \frac{6\pi}{7}\} \cap (0; \pi) = \{\frac{6\pi}{7}\}$

$k = 1 \Rightarrow a \in \{-\frac{\pi}{7} + 2\pi; \frac{6\pi}{7} + 2\pi\} \cap (0; \pi) = \emptyset$

$S_f: x = \frac{6\pi}{7}$

Prof. Ovidiu Bădescu

VI.3

Fie $A(m)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ m & m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$, calculați $\det(A(1))$

$E_1)$ $A(1)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\det A(1)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{l_1=l_2}{=\!=} 0$

sau, dacă eram mai puțin deștepți;

$\det A(1)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+1+1-1-1-2=0$

Prof. Ovidiu Bădescu

V140
[1 96]

Fie $A(m)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ m & m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$, găsiți $m\in\mathbb{R}$

dacă $A(m)$ este inversabilă

E_1) $A(m)$ inversabilă $\Leftrightarrow \det A(m)\neq 0$

E_2) $\det A(m)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & m \\ m & m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}=$

$= 2m+1+m^3-m^2-2m-m$

$= m^3-m^2-m+1$

E_3) $\det A(m)=0 \Rightarrow m^3-m^2-m+1=0$

	m^3	m^2	m	m^0
	1	−1	−1	1
1	1	0	−1	0

$\Rightarrow (m-1)(m^2-1)=0$

$\Rightarrow$ $m-1=0 \Rightarrow m=1$ sau $m^2-1=0 \Rightarrow m^2=1 \Rightarrow m=\pm 1$

E_4) $\det A(m)\neq 0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $A(m)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ m & m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{pmatrix}$, rezolvați ec. matriceală $X \cdot A(0)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $X \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$

$E_1)$ $A(0)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $X \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \Rightarrow X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

$E_3)$ $X \cdot A(0)=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & a & b+c \\ 2d+f & d & e+f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$E_4)$ $\begin{cases} 2a+c=2 \\ \boxed{a=1} \\ b+c=0 \end{cases}$ și $\begin{cases} 2d+f=-1 \\ \boxed{d=3} \\ e+f=2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2+c=2 \\ b+c=0 \end{cases}$ și $\begin{cases} b+f=-1 \\ e+f=2 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{c=0} \\ \boxed{b=0} \end{cases}$ și $\begin{cases} \boxed{f=-7} \\ \boxed{e=9} \end{cases} \Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & -7 \end{pmatrix}}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x*y = xy - 4x - 4y + 20$, arătați că

$$x*y = (x-4)(y-4)+4$$

E,) $x*y = x(y-4) - 4(y-4) + 4$

$$x*y = (y-4)(x-4)+4$$

$$\Rightarrow x*y = (x-4)(y-4)+4$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x*y = xy - 4x - 4y + 20$, se știe că

$x*y = (x-4)(y-4)+4$, calculați

$1*2*3*\ldots*2016$

E_1) din $x*y = (x-4)(y-4)+4 \Rightarrow \begin{cases} 4*y = 4 \\ x*4 = 4 \end{cases}$

E_2) $N = 1*2*\ldots*2016 \Rightarrow$

$N = (\underbrace{1*2*3}_{x}) * 4 * (\underbrace{5*6*\ldots*2016}_{y})$

$N \xrightarrow{x*4=4} 4*(5*6*\ldots*2016)$

$\xrightarrow{4*y=4} 4$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $x*y = xy - 4x - 4y + 20$, x cu $a, b, c \in \mathbb{N}$, $a < b < c$ și $a*b*c = 66$

$E_1)$ $x*y = x(y-4) - 4(y-4) + 4$

$x*y = (y-4)(x-4) + 4$

$\Rightarrow \boxed{x*y = (x-4)(y-4)+4}$ (1)

$E_2)$ $a*b*c = (a*b)*c = \underbrace{\left((a-4)(b-4)+4\right)}_{x} * c$

$\overset{(1)}{=\!=} \left((a-4)(b-4)+4-4\right)(c-4) + 4$

$= (a-4)(b-4)(c-4) + 4$

$E_3)$ $a*b*c = 66 \Rightarrow (a-4)(b-4)(c-4) + 4 = 66$

$\Rightarrow (a-4)(b-4)(c-4) = 62$, $a < b < c$, $a, b, c \in \mathbb{N}$

$E_4)$ $\begin{matrix} 62 & 2 \\ 31 & 31 \\ 1 & \end{matrix}$ $\Rightarrow 62 = 2 \cdot 31$

$E_5)$ $a, b, c \in \mathbb{N} \Rightarrow a-4, b-4, c-4 \in \mathbb{Z}$ și

$a-4 < b-4 < c-4$

cum $a < b < c \Rightarrow$

$E_6)$ Cob I: $\begin{cases} a-4 = -31 \Rightarrow a = -27 \text{ fals} \\ b-4 = -2 \\ c-4 = 1 \end{cases}$

Cob II: $\begin{cases} a-4 = -2 \Rightarrow a = 2 \\ b-4 = -1 \Rightarrow b = 3 \\ c-4 = 31 \Rightarrow c = 35 \end{cases}$

Cob III: $\begin{cases} a-4 = -1 \\ b-4 = 2 \\ c-4 = -31 \end{cases}$

Cob IV: $\begin{cases} a-4 = 1 \Rightarrow a = 5 \\ b-4 = 2 \Rightarrow b = 6 \\ c-4 = 31 \Rightarrow c = 35 \end{cases}$

$(a, b, c) \in \{(2; 3; 35); (5; 6; 35)\}$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f: \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$

Găsiți ec asimpt orizontale spre ∞ ale G_f

E_1) <u>as. oriz spre ∞.</u>:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x(x+1)} \overset{\frac{1}{\infty}}{=\!=\!=} 0 \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow y = 0$ este as. oriz spre ∞

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$

Se cer coordonatele pct de pe G_f în care tangenta este paralelă cu axa absciselor

---

E_1) axa absciselor este $Ox \Rightarrow tg \parallel Ox \Rightarrow$

$\Rightarrow m_{tg} = m_{Ox}$, $m_{Ox} = tg\,\beta = tg\,0 = 0 \Rightarrow m_{tg} = 0$

E_2) dar, $m_{tg} = f'(\alpha) \Rightarrow f'(\alpha) = 0$

E_3) $f'(x) = \left(\frac{1}{x^2+x}\right)' = \frac{1'(x^2+x) - 1\cdot(x^2+x)'}{(x^2+x)^2} =$

$$= \frac{0-2x-1}{(x^2+x)^2} = -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$$

E_4) $f'(\alpha)=0 \Rightarrow 2\alpha+1=0 \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{2}$

E_5) Se cer coord. punctului $\Rightarrow f(-\frac{1}{2})$ calculez

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{1}{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4$$

$$\Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}, -4\right)$$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$, calculați

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(1)+f(2)+\dots+f(n)\right)^n$$

E1) $x_n=f(1)+f(2)+\dots+f(n)=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$

$$\Rightarrow x_n=\frac{2-1}{1\cdot2}+\frac{3-2}{2\cdot3}+\dots+\frac{n+1-n}{n(n+1)}\Rightarrow$$

$$x_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow x_n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

E2) $\ell=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\overset{1^\infty}{=}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{n}{n+1}-1\right)^n=$

$$=\lim_{n\to\infty}\Bigg[\underbrace{\left(1+\frac{-1}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-1}}}_{e}\Bigg]^{\frac{-1}{n+1}\cdot n}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n+1}}=$$

$$=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{n(1+\frac{1}{n})}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

Obs.: $x_n=\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}$ se poate calcula și cu metoda coef. nedeterminați astfel:

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)},\quad \frac{1}{k(k+1)}=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}=\frac{A(k+1)+Bk}{k(k+1)}=$$

$$=\frac{k(A+B)+A}{k(k+1)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\A=1\end{cases}\Rightarrow B=-1\Rightarrow\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$\Rightarrow x_n=1-\frac{1}{n+1}$ și de aici analog ca mai sus

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, calculați

$$\int_2^4 \frac{1}{\ln x}\cdot f(x)\,dx$$

$$I=\int_2^4 \frac{1}{\ln x}\cdot\frac{\ln x}{x}\,dx=\int_2^4 \frac{1}{x}\,dx=$$

$$=\ln|x|\Big|_2^4=\ln 4-\ln 2=\ln\frac{4}{2}=\ln 2$$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

Arătați că: $\int_1^e \frac{f(x)}{x}\,dx = 1-\frac{2}{e}$

E1) $I=\int_1^e \frac{\frac{\ln x}{x}}{x}\,dx=\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\,dx$

E2) $f=\ln x \Rightarrow f'=\frac{1}{x}$

$g'=\frac{1}{x^2}\Rightarrow g=\int\frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}dx=\frac{x^{-1}}{-1}=-\frac{1}{x}$

E3) $I=-\frac{1}{x}\ln x\Big|_1^e+\int_1^e\frac{1}{x^2}dx$

$I=-\left(\frac{1}{e}\ln e-1\underbrace{\ln 1}_{0}\right)+\int_1^e x^{-2}dx\Rightarrow$

$I=-\frac{1}{e}\cdot 1+0+\frac{x^{-1}}{-1}\Big|_1^e=-\frac{1}{e}-\frac{1}{x}\Big|_1^e=$

$=-\frac{1}{e}-\left(\frac{1}{e}-1\right)=-\frac{2}{e}+1=$

$=1-\frac{2}{e}$

Prof. Ovidiu Bagescu

V160

Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. Arătați că $\forall n\in\mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty}\int_1^e \frac{f(x)}{x^n}dx=0$$

E_1) Fie $I_n=\int_1^e \frac{f(x)}{x^n}dx=\int_1^e \frac{\frac{\ln x}{x}}{x^n}dx=\int_1^e \frac{\ln x}{x^{n+1}}dx$

E_2) încercăm să calculăm I_n (dacă am noroc)

$$f=\ln x\Rightarrow f'=\frac{1}{x}$$

$$g'=\frac{1}{x^{n+1}}\Rightarrow g=\int x^{-n-1}dx=\frac{x^{-n}}{-n}$$

$$I_n=\frac{x^{-n}}{-n}\cdot\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{-n}\int_1^e\frac{x^{-n}}{x}dx$$

$$I_n=\frac{e^{-n}}{-n}\cdot\ln e-\frac{1}{-n}\cdot 0-\frac{1}{-n}\int_1^e x^{-n-1}dx$$

$$I_n=\frac{e^{-n}}{-n}-\frac{1}{-n}\cdot\frac{x^{-n}}{-n}\Big|_1^e$$

$$I_n=\frac{1}{-n}\left(e^{-n}-\frac{1}{-n}\cdot(e^{-n}-1)\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} I_n \overset{\frac{1}{-\infty}\left(e^{-\infty}-\frac{1}{-\infty}(e^{-\infty}-1)\right)}{=\!=\!=} 0$$

---

mod I: (generală)

$I_n=\int_1^e\frac{\ln x}{x^{n+1}}dx$ și cum avem $\int_1^e\frac{\ln x}{x^{n+1}}dx\Rightarrow$

$\Rightarrow 1\le x\le e\ /\ln(\cdot)\Rightarrow 0\le\ln x\le 1\ /:x^{n+1}\Rightarrow$

$0\le\frac{\ln x}{x^{n+1}}\le\frac{1}{x^{n+1}}\Big/\int_1^e\ldots dx\Rightarrow 0\le I_n\le\int_1^e x^{-n-1}dx$

$\Rightarrow 0\le I_n\le\frac{x^{-n}}{-n}\Big|_1^e\Rightarrow 0\le I_n\le\frac{1}{-n}\left(\frac{1}{e^n}-1\right)\Rightarrow I_n\to 0$

$\to 0$ ✓ $\to 0$

Obs.: nu e voie să împărțim inegalitățile

Prof. Ovidiu Badescu