Examenul de bacalaureat național 2016

Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Determinați numărul real x, știind că numerele 7, $3x$ și x^2+2 sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-2x+m$ este tangentă axei Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-9}=32^x$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând o submulțime a mulțimii $A=\left\{\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6}\right\}$, aceasta să aibă cel mult două elemente.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(1,0)$ și $C(1,4)$. Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul B și este paralelă cu mediana din A a triunghiului ABC.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $A=\frac{3\pi}{4}$ și $BC=\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & x & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^x\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(A(10)\right)=1024$.

5p **b)** Determinați numerele reale x, știind că $A(x)\cdot A(2x)=A\left(x^2+2\right)$.

5p **c)** Știind că $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot A(3)\cdot\ldots\cdot A(2016)$, demonstrați că n este număr natural divizibil cu 2017.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-5X+a$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $f(0)=a$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=2016-4a$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Demonstrați că polinomul f are cel mult o rădăcină în mulțimea numerelor întregi.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x-x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.

5p **c)** Demonstrați că $f\left(2\sqrt{3}\right)<f\left(3\sqrt{2}\right)$.

2. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int_0^1\left(1-x^2\right)^n dx$.

5p **a)** Arătați că $I_1=\frac{2}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că $I_{n+1}\le I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

5p **c)** Demonstrați că $(2n+3)I_{n+1}=2(n+1)I_n$, pentru orice număr natural nenul n.

Găsiți $x \in \mathbb{R}$ dacă numerele $7, 3x$ și x^2+2 sunt în progr aritmetică V138 I/1

E_1) a, b, c progr aritm $\Leftrightarrow a+c=2b$

E_2) în cazul nostru, $7+(x^2+2)=2\cdot 3x$

$\Leftrightarrow x^2+9-6x=0$

$\Leftrightarrow x^2-6x+9=0$

E_3) $x_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{36-36}}{2\cdot 1}=\dfrac{6\pm 0}{2}=3$

Prof. Ovidiu Badescu

V/138
I/2

Găsiți $m \in \mathbb{R}$ dacă parabola lui $f(x) = x^2 - 2x + m$ este tangentă lui Ox

---

E_1) parabola e tg la $Ox \Leftrightarrow \Delta = 0$

E_2) $\Delta = 0 \Rightarrow (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m = 0 \Leftrightarrow$

$4 - 4m = 0$

$4m = 4 \Rightarrow m = 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

V138
I/3

Rezolvați: $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x-9} = 32^{x}$

$E_1)$ $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ și $32 = 2^{5}$

$E_2)$ ec.: $\left(2^{-1}\right)^{4x-9} = \left(2^{5}\right)^{x}$

$2^{-4x+9} = 2^{5x}$

$E_3)$ $f(x) = 2^{x}$ injectivă $\Rightarrow$

$\Rightarrow -4x+9 = 5x$

$-9x = -9 \Rightarrow x = 1$

Prof. Ovidiu Bădescu

V138 I/4

Calculați probabilitatea ca alegând o submulțime din $A=\{\sqrt{1};\sqrt{2};\sqrt{3};\sqrt{4};\sqrt{5};\sqrt{6}\}$, aceasta să aibă cel mult două elemente?

$E_1)$ $P=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}$

$E_2)$ nr. cazuri posibile: nr. total de submulțimi ale lui A care este $2^{\text{card}A}=2^6=64$

$E_3)$ nr. cazuri favorabile: nr. de submulțimi cu cel mult 2 elemente

nr. submulțimi cu 0 elem.: $C_6^0=1$

nr. submulțimi cu 1 elem.: $C_6^1=6$

nr. submulțimi cu 2 elem.: $C_6^2=\dfrac{6!}{2!\cdot 4!}=15$

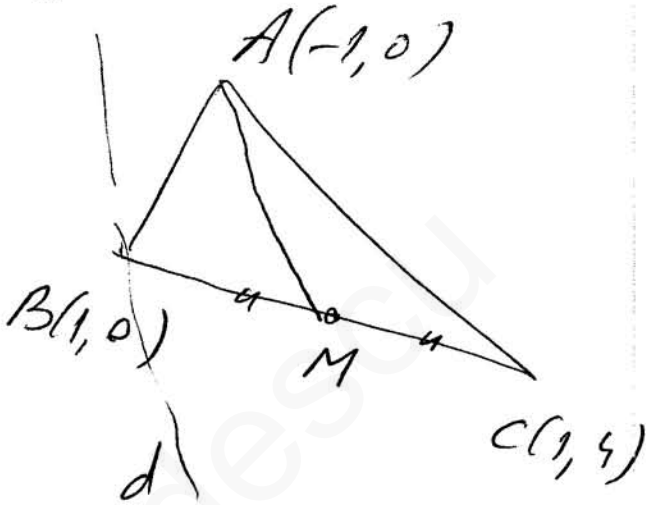
favorabile $15+6+1=22$

$E_4)$ $P=\dfrac{22}{64}=\dfrac{11}{32}$

Prof. Ovidiu Băescu

V138

Fie $A(-1;0)$, $B(1;0)$, $C(1;4)$, găsiți ec. d/5 dreptei ce trece prin B și este paralelă cu mediana din A pt $\triangle ABC$



E_1) M mijl lui BC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{1+1}{2} = 1 \\ y_M = \frac{0+4}{2} = 2 \end{cases} \Rightarrow M(1;2)$$

E_2) $d \parallel AM \Rightarrow m_d = m_{AM}$

E_3) $m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{2-0}{1+1} = 1 \Rightarrow m_d = 1$

E_4) Știm $B(1,0)$, știm $m_d = 1$

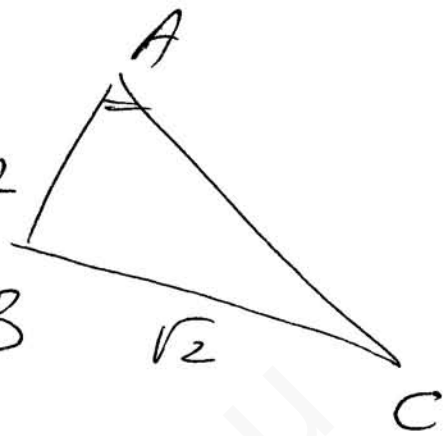
$\Rightarrow$ ec d: $y - y_B = m_d(x - x_B)$

$\Rightarrow y - 0 = 1(x-1) \Rightarrow \boxed{x - y - 1 = 0}$

Prof Ovidiu Bădescu

V138
I/6

Calculați raza cercului circumscris $\triangle ABC$ dacă $A = \frac{3\pi}{4}$ și $BC = \sqrt{2}$



$E_1)$ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

$E_2)$ folosim

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sin \frac{3\pi}{4}} = 2R$$

$$\frac{\sqrt{2}}{\sin 135^\circ} = 2R$$

$E_3)$ $\sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) =$

$= \sin 90^\circ \cos 45^\circ + \cos 90^\circ \sin 45^\circ =$

$= 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$E_4)$ înlocuim $\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2R$

$\Rightarrow \sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 2R \Rightarrow \boxed{R = 1}$

Prof. Ovidiu Badescu

V138

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$, arătați că II 1a)

$\det(A(10)) = 1024$

$E_1)\ A(10)=\begin{pmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{pmatrix}$

$E_2)\ \det A(10) = \begin{vmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{vmatrix} =$

$= 2^{10} + 0 + 0 - 0 - 0 - 0$

$= 2^{10} = 1024$

Prof. Ovidiu Badescu

Găsiți x dacă $A(x) \cdot A(2x) = A(x^2+2)$ II 16)

unde $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$

$E_1)$ $A(x) \cdot A(2x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{2x} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 3x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \cdot 2^{2x} \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 3x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{3x} \end{pmatrix} =$

$= A(3x)$

$E_2)$ ec devine $A(3x) = A(x^2+2)$

$\Leftrightarrow 3x = x^2+2 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Prof. Ovidiu Badescu

V138
II 1c)

Fie $A(x)=\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$, dacă

$A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot \ldots \cdot A(2016)$, arătați că

$n \vdots 2017$

$E_1)$ $A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^y \end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix} 1 & x+y & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{x+y} \end{pmatrix}=A(x+y)$ $(*)$

$E_2)$ Probabil $A(1)A(2)\ldots A(n)=A(1+2+\ldots+n)$, $\forall n\geq 1$

$E_3)$ I $P(1)$: $A(1)=A(1)$ adev.

II Fp. $P(k)$ adev. $\overset{(?)}{\Rightarrow}$ $P(k+1)$ adev. unde

$P(k)$: $A(1)A(2)\ldots A(k)=A(1+2+\ldots+k)$

$P(k+1)$: $A(1)A(2)\ldots A(k+1)=A(1+2+\ldots+k+(k+1))$

Știm că $P(k)$ adev

$\Rightarrow A(1)A(2)\ldots A(k)=A(1+2+\ldots+k)\,|\cdot A(k+1)$

$\Rightarrow A(1)A(2)\ldots A(k+1)=A(1+2+\ldots+k)A(k+1)\overset{(*)}{=}$

$=A(1+2+\ldots+k+k+1)\Rightarrow P(k+1)$ adev.

$\Rightarrow P(n)$ adev., $\forall n\geq 1$

$E_4)$ $A(n)=A(1+2+\ldots+2016)\Rightarrow n=1+2+\ldots+2016$

$\Rightarrow n=\frac{2016\cdot 2017}{2}=1008\cdot 2017\Rightarrow n \vdots 2017$

Prof. Ovidiu Bădescu

V138
II 2a)

Fie $f = X^3 - 5X + a$, arătați că

$$f(0) = a$$

$E_1)$ $f(0) = 0^3 - 5 \cdot 0 + a$

$\Rightarrow f(0) = a$

Prof. Ovidiu Bădescu

V138

Fie $f = X^3 - 5X + a$, găsiți $a \in \mathbb{R}$ dacă $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 2016 - 4a$ (II 26)

E_1) x_1 rād $\Rightarrow x_1^3 - 5x_1 + a = 0$

x_2 rād $\Rightarrow x_2^3 - 5x_2 + a = 0$

x_3 rād $\Rightarrow x_3^3 - 5x_3 + a = 0$

E_2) adunăm $\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 5(x_1 + x_2 + x_3) + 3a = 0$

E_3) Dar, $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = -\frac{0}{1} = 0$

$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -3a$

E_4) înlocuind în enunț $\Rightarrow -3a = 2016 - 4a$

$\Leftrightarrow \boxed{a = 2016}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $f = X^3 - 5X + a$, $a \in \mathbb{R}$, arătați că f are cel mult o rădăc în $\mathbb{Z}$, nr. întregi

V138
II 2c)

E_1) (R. A.) Pp. $\exists x_1 \in \mathbb{Z}$, $x_2 \in \mathbb{Z}$ rădăcini

E_2) Din VIETE, $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} = 0$ $\Big\} \Rightarrow x_3 \in \mathbb{Z}$

Dar, $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$

E_3) Așadar, dacă f are 2 rād întregi $\Rightarrow$ f are 3 rād întregi

E_4) Cum $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (S_1)^2 - 2S_2 = 0 - 2 \cdot (-5) = 10$

$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 10$

E_5) Cum $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_1^2, x_2^2, x_3^2 \in \mathbb{N}$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1^2, x_2^2, x_3^2 \in \{0; 1; 4; 9\}$

E_6) deoarece x_1, x_2, x_3 sunt rădăcini la care nu contează ordinea în care le luăm, presupunem că $x_1^2 \leq x_2^2 \leq x_3^2$ (*)

E_7) $x_1^2 = 0 \Rightarrow x_2^2 + x_3^2 = 10$

dacă $x_2^2 = 0 \Rightarrow x_3^2 = 10 \Rightarrow x_3 \notin \mathbb{Z}$, K.O.

dacă $x_2^2 = 1 \Rightarrow x_3^2 = 9 \Rightarrow x_3 = \pm 3$ posibil

dacă $x_2^2 = 4 \Rightarrow x_3^2 = 5 \Rightarrow x_3 = \pm\sqrt{5} \notin \mathbb{Z}$ K.O.

dacă $x_2^2 = 9 \Rightarrow x_3^2 = 1 \not\Rightarrow x_2^2 \geq x_3^2$, K.O.

E_8) dacă $x_1^2 = 1 \Rightarrow x_2^2 + x_3^2 = 9 \Rightarrow$ $\begin{cases} x_2^2 = 1 \Rightarrow x_3^2 = 8$ K.O.
$x_2^2 = 4 \Rightarrow x_3^2 = 5$ K.O
$x_2^2 = 9 \Rightarrow x_3^2 = 0$ K.O cu (*) $\end{cases}$

E_9) dacă $x_1^2 = 4 \Rightarrow x_2^2 + x_3^2 = 6 \Rightarrow$ $\begin{cases} x_2^2 = 4 \Rightarrow x_3^2 = 2$ K.O.
$x_2^2 = 9 \Rightarrow x_3^2 \notin \mathbb{Z}$ K.O. $\end{cases}$

E_{10}) dacă $x_1^2 = 9 \Rightarrow x_2^2 + x_3^2 = 1$, $x_2^2 \geq x_1^2$ K.O.

E_{11}) posibil $x_1 \in \{0\}$, $x_2 \in \{\pm 1\}$, $x_3 \in \{\pm 3\}$ dar $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 \neq 0$, K.O. $\Rightarrow$ f rād întregi

Prof. Ovidiu Bădescu

V138

Fie $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$, arătați că $\overline{IV}$ 1a)

$$f'(x) = e^x - x - 1$$

E1) $f'(x) = e^x - \frac{1}{2} \cdot 2x - 1$

$$f'(x) = e^x - x - 1$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V138 III 16)

Fie $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$, calculați

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$E_1)\ l = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1\right)'}{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x - x - 1}{e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x\left(1 - \left(\frac{x}{e^x}\right) - \left(\frac{1}{e^x}\right)\right)}{e^x\left(1 - \left(\frac{\frac{1}{2}x^2}{e^x}\right)\left(\frac{x}{e^x}\right)\left(\frac{1}{e^x}\right)\right)}$$

($\frac{x}{e^x} \to 0$, $\frac{1}{e^x} \to 0$, $\frac{\frac{1}{2}x^2}{e^x} \to 0$, $\frac{x}{e^x} \to 0$, $\frac{1}{e^x} \to 0$)

$= 1$, s-a folosit $\lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{a^x} = 0, \forall a > 1$

Obs.: era greșit să se aplice direct l'Hopital deoarece trebuia arătat că suntem în cazul $\frac{\infty}{\infty}$

Prof. Ovidiu Bănescu

V138

Fie $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$, arătați că $\overline{II}$ 1c)

$$f(2\sqrt{3}) < f(3\sqrt{2})$$

E_1) Facem tabelul de variație

$$f'(x) = \left(e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1\right)' =$$

$$= e^x - \frac{1}{2}\cdot 2x - 1 = e^x - x - 1$$

E_2) nu putem găsi semnul, calculăm

$$f''(x) = (e^x - x - 1)' = e^x - 1$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

E_3)

x	$-\infty$		0		$2\sqrt{3}$		$3\sqrt{2}$		$+\infty$
f''	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
f'	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
f	$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\nearrow$

$f''(-1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$ pe $(-\infty; 0) \Rightarrow f_1' \searrow$

$f''(1) = e - 1 > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$ pe $(0; \infty) \Rightarrow f_1' \nearrow (0; \infty)$

$f'(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$

$f_1' \searrow$ pe $(-\infty; 0)$, $f_1' \nearrow (0; \infty)$ $\Rightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f_1 \nearrow$ pe $\mathbb{R}$

E_4) $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ și $3\sqrt{2} = \sqrt{18} \Rightarrow 2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$ / $\circ f_1 \nearrow$

$\Rightarrow f(2\sqrt{3}) < f(3\sqrt{2})$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$, arătați că $\overline{II}$ 2a)

$I_1 = \frac{2}{3}$

E1) $I_1 = \int_0^1 (1-x^2) dx = x\Big|_0^1 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 =$

$= (1-0) - \left(\frac{1}{3} - 0\right) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$, arătați că III 25)

$I_{n+1} \leq I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

E_1) Calculăm $I_{n+1} - I_n$

E_2) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx - \int_0^1 (1-x^2)^n dx =$

$= \int_0^1 \left((1-x^2)^{n+1} - (1-x^2)^n\right) dx =$

$= \int_0^1 (1-x^2)^n (1-x^2-1) dx =$

$= \int_0^1 (1-x^2)^n (-x^2) dx$

E_3) Dacă, $x \in [0;1] \Rightarrow x^2 \in [0;1] \Rightarrow$

$1-x^2 \geq 0 \Rightarrow (1-x^2)^n \geq 0$

Dacă, $x \in [0;1] \Rightarrow x^2 \in [0;1] \Rightarrow -x^2 \in [-1;0]$

E_4) Cum $(1-x^2)^n (-x^2) \leq 0 \mid \int_0^1 \dots dx$

$\Rightarrow \int_0^1 (1-x^2)^n (-x^2) dx \leq 0$

E_5) $\Rightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$

Prof. Ovidiu Badescu

Fie $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$, arătați că III 2 c)

$(2n+3) I_{n+1} = 2(n+1) I_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

E1) $I_{n+1} = \int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx$

E2) $f(x) = (1-x^2)^{n+1} \Rightarrow f'(x) = (n+1)(1-x^2)^n (-2x)$

$g'(x) = 1 \Rightarrow g(x) = x$

E3) $I_{n+1} = (1-x^2)^{n+1} \cdot x \Big|_0^1 - \int_0^1 (n+1)(1-x^2)^n (-2x^2) dx$

$I_{n+1} = 0 - 0 - -2(n+1) \int_0^1 (1-x^2)^n (-x^2) dx$

$I_{n+1} = -2(n+1) \int_0^1 (1-x^2)^n (\underline{1-x^2} - 1) dx$

$I_{n+1} = -2(n+1) \left(\int_0^1 (1-x^2)^{n+1} dx - \int_0^1 (1-x^2)^n dx \right)$

$I_{n+1} = -2(n+1)(I_{n+1} - I_n)$

$I_{n+1} = -2(n+1) I_{n+1} + 2(n+1) I_n$

$I_{n+1}(2n+3) = 2(n+1) I_n$

Prof. Ovidiu Badescu