Examenul de bacalaureat național 2015

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 9

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Calculați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_3=6$ și $a_4=8$.

5p **2.** Determinați valoarea minimă a funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-9$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2+3}=x+1$.

5p **4.** Determinați numărul submulțimilor cu două elemente ale mulțimii $\{1,2,3,4,5,6,7\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ și $B(0,3)$. Determinați ecuația dreptei AB.

5p **6.** Calculați lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC în care $AB=8$ și $C=\frac{\pi}{6}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x & 2\\ 3 & 6\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A=-2$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det(B(x)+I_2)=8$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=xy-7x-7y+56$.

5p **a)** Arătați că $(-7)*7=7$.

5p **b)** Arătați că $x*y=(x-7)(y-7)+7$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Calculați $1*2*3*\cdots*2015$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\ln x+x$.

5p **a)** Arătați că $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=e$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx=\frac{3}{2}$.

5p **b)** Arătați că $\int_0^1 x^2 f(x)dx=-\frac{1}{2}+\ln 2$.

5p **c)** Determinați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0,1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

V140
I/1

Calculați rația progresiei aritm a_n dacă

$a_3 = 6$ și $a_4 = 8$

$E_1)$ $a_n = a_1 + (n-1)r$

$\Rightarrow a_3 = 6 \Leftrightarrow a_1 + 2r = 6$

$a_4 = 8 \Leftrightarrow a_1 + 3r = 8$

$\underline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$

$\overset{-4}{}\ \ -r = -2 \Rightarrow \boxed{r = 2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

V150
I/2

Găsiți minimul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$f(x)=x^2-9$

$E_1)$ $f(x)=ax^2+bx+c$ cu $a>0 \Rightarrow G_f \cup$

$\Rightarrow f$ are minim egal cu $-\frac{\Delta}{4a}$

$E_2)$ $f(x)=x^2-9 \Rightarrow \min f=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{0-4\cdot1\cdot(-9)}{4\cdot1}=$

$=-\frac{36}{4}=-9$

Prof. Ovidiu Bădescu

Rezolvați: $\sqrt{x^2+3} = x+1$

V 140
I/3

E_1) $\sqrt{x^2+3} = x+1 \,/\,()^2 \Rightarrow x^2+3 = (x+1)^2 \Leftrightarrow$

$x^2+3 = x^2+2x+1 \Leftrightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$

soluție posibilă

E_2) o verificăm $\Rightarrow \sqrt{1^2+3} = 1+1$

$\Leftrightarrow \sqrt{4} = 2$ adev

$\Rightarrow x = 1$ soluție

Prof. Ovidiu Bădescu

V 150
I/6

Câte sunt cu 2 elemente are mulțimea

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

E_1) nr. sunt reordonate cu 2 elemente din n posibile este C_n^2

E_2) în cazul nostru, nr. sunt cu 2 elemente din 7 posibile este C_7^2

E_3) $C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7!}{2! \cdot 5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{2! \cdot 5!} = \frac{42}{2} = 21$

Prof. Ovidiu Bădescu

V 150
I/5

Fie $A(2;1)$ și $B(0;3)$, găsiți ec. dreptei AB

$E_1)$ ec. AB: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \end{vmatrix} = 0$

$E_2)$ $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 0 + 6 - 0 - 3x - 2y = 0$

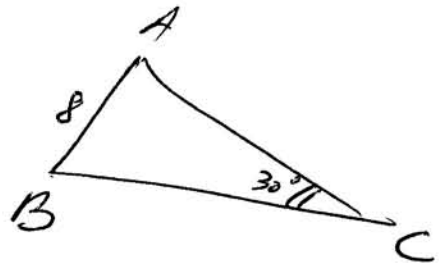
$\Leftrightarrow -2x - 2y + 6 = 0 \mid :(-2)$

$x + y - 3 = 0$

Prof. Ovidiu Bădescu

V150
I/6

Calculați R dacă $AB=8$, $C=\frac{\pi}{6}$



E_1) T. sinusurilor

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

E_2) alegem $\frac{c}{\sin C}=2R \Rightarrow \frac{8}{\sin 30^\circ}=2R$

$$\Rightarrow \frac{8}{\frac{1}{2}}=2R \Leftrightarrow 8\cdot 2=2R$$

$$\Rightarrow \boxed{R=8}$$

Prof. Ovidiu Bădescu

V140

Fie $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$, arătați că $\det A=-2$ ▽ 1a)

E1] $\det A=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=4-6=-2$

Prof. Ovidiu Bădescu

V140
II 15)

Fie $B(x)=\begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\det(B(x)+I_2)=8$

$E_1)$ $B(x)+I_2=\begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$

$E_2)$ $\det(B(x)+I_2)=\begin{vmatrix} x+1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=7(x+1)-6=$
$=7x+1$

$E_3)$ $\det(B(x)+I_2)=8 \Leftrightarrow 7x+1=8$

$\Leftrightarrow 7x=7 \Leftrightarrow x=1$

Prof. Ovidiu Badescu

V/50
II 1c)

Fie $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ și $B(x)=\begin{pmatrix}x&2\\3&6\end{pmatrix}$,

găsiți $x\in\mathbb{R}$ dacă $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A$

$E_1)$ $A\cdot B(x)=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x&2\\3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+6&2+12\\3x+12&6+24\end{pmatrix}$

$E_2)$ $B(x)\cdot A=\begin{pmatrix}x&2\\3&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+6&2x+8\\21&6+24\end{pmatrix}$

$E_3)$ $A\cdot B(x)=B(x)\cdot A \Leftrightarrow \begin{cases} x+6=x+6 \text{ adev} \\ 14=2x+8 \Rightarrow 2x=6 \\ 3x+12=21 \Rightarrow 3x=9 \\ 30=30 \text{ adev} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x=6 \Rightarrow x=3 \\ 3x=9 \Rightarrow x=3 \end{cases} \Rightarrow x=3$ soluție

Prof. Ovidiu Badescu

V40

II 2a)

Fie $x * y = xy - 7x - 7y + 56$,

arătați că: $(-7) * 7 = 7$

$E_1) (-7) * 7 = -7 \cdot 7 - 7 \cdot (-7) - 7 \cdot 7 + 56 =$

$= -49 + 49 - 49 + 56 = 7$

Prof. Ovidiu Bădescu

V 40

Fie $x * y = x(y-7x-7y+56$, arătați II 26)

că: $x * y = (x-7)(y-7)+7$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$

$E_1)$ $(x-7)(y-7)+7 = xy-7x-7y+49+7 =$

$= xy-7x-7y+56 = x * y$

$E_2) \Rightarrow x * y = (x-7)(y-7)+7$

Prof. Ovidiu Bădescu

Fie $x * y = xy - 7x - 7y + 56$, se știe că $*$ asociativă și că $x * y = (x-7)(y-7)+7$ II 20)

Calculați: $1 * 2 * 3 * \ldots * 2015$

E_1) din $x * y = (x-7)(y-7)+7 \Rightarrow$

$7 * y = 0 + 7 \Rightarrow 7 * y = 7, \forall y \in \mathbb{R}$

$x * 7 = 0 + 7 \Rightarrow x * 7 = 7, \forall x \in \mathbb{R}$

E_2) $N = 1 * 2 * 3 * \ldots * 2015 =$

$= (\underbrace{1 * 2 * \ldots * 6}_{x}) * 7 * (8 * 9 * \ldots * 2015)$

$\underbrace{x * 7 = 7}_{*\text{ asociat}}$ $7 * (\underbrace{8 * 9 * \ldots * 2015}_{y})$ $\underbrace{7 * y = 7}_{*\text{ asociat}}$ 7

Prof. Ovidiu Bădescu

V140

Fie $f(x)=e^x-\ln x+x$, arătați că: VI 1a)

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=e$$

$E_1)$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

$E_2)$ $f'(x)=(e^x-\ln x+x)'=e^x-\dfrac{1}{x}+1$

$\Rightarrow f'(1)=e-1+1\Rightarrow f'(1)=e$

$E_3)\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=e$

Prof. Ovidiu Badescu

V140
II 16'

Fie $f(x) = e^x - \ln x + x$, găsiți ec. tg la G_f în $x=1$

E1) ec tg în $x=a$ este: $y - f(a) = f'(a)(x-a)$

E2) în cazul meu, $a=1 \Rightarrow$ ec. tg în $x=1$ este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

E3| $f(1) = e^1 - \ln 1 + 1 = e - 0 + 1 = e+1$

E4| $f'(x) = (e^x - \ln x + x)' = e^x - \frac{1}{x} + 1$

$\Rightarrow f'(1) = e - 1 + 1 \Rightarrow f'(1) = e$

E5| ec. tg.: $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow$

$y - (e+1) = e(x-1) \Leftrightarrow$

$y - e - 1 = xe - e \Rightarrow x \cdot e - y + 1 = 0$

Prof. Ovidiu Băescu

Fie $f(x) = e^x - \ln x + x$, arătați că f e CONVEXĂ pe $(0;\infty)$ VI § 0 III 1c)

E_1) vom arăta că $f''(x) \geq 0, \forall x \in (0;\infty)$

E_2) $f'(x) = (e^x - \ln x + x)' = e^x - \frac{1}{x} + 1$

E_3) $f''(x) = (e^x - \frac{1}{x} + 1)' = e^x - (-\frac{1}{x^2}) + 0 =$

$= e^x + \frac{1}{x^2}$

E_4) $\forall x > 0$, $e^x > 0$ și $\frac{1}{x^2} > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$

x	$\nexists$	0		
f''	$\nexists$	$+$	$+$	$+$
f	$\nexists$		$\cup$	

$\Rightarrow f$ convexă pe $(0;\infty)$

Prof. Ovidiu Bădescu

V140
III 29)

Fie $f:(-1;\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x+1}$,

arătați că $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx=\frac{3}{2}$

E1) $I=\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx=\int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{x+1}}dx=\int_0^1 (x+1)dx=$

$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1+x\Big|_0^1=\left(\frac{1}{2}-0\right)+(1-0)=\frac{3}{2}$

Prof. Ovidiu Bădescu

VI 40
III 261

Fie $f(x)=\frac{1}{x+1}$, arătați că

$$\int_0^1 x^2 f(x)\,dx = -\frac{1}{2}+\ln 2$$

E1) $I=\int_0^1 x^2 f(x)\,dx=\int_0^1 x^2\cdot\frac{1}{x+1}\,dx=$

$=\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$

E2) $x^2 \;\big|\, x+1$

$-x^2-x \quad\quad x-1$

$-x$

$-x+1$

1

$\Rightarrow \frac{x^2}{x+1}=x-1+\frac{1}{x+1}$

E3) $I=\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx=$

$=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1-x\Big|_0^1+\ln(x+1)\Big|_0^1=$

$=\left(\frac{1}{2}-0\right)-(1-0)+(\ln 2-\ln 1)$

$=\frac{1}{2}-1+\ln 2=-\frac{1}{2}+\ln 2$

Prof. Ovidiu Bădescu

Găsiți volumul generat de G_g unde V140
III 26)

$g:[0;1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$ unde $f(x)=\frac{1}{x+1}$

$E_1)\ V(C_g)=\pi\int_a^b g^2(x)\,dx=\pi\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}\right)^2 dx=$

$$=\pi\int_0^1\frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$E_2)$ not $x+1=t\ |(\ )'\Rightarrow dx=dt$

$x=0\Rightarrow t=1$ și $x=1\Rightarrow t=2$

$E_3)\ I=\pi\int_1^2\frac{1}{t^2}\cdot dt=\pi\int_1^2 t^{-2}dt=$

$$=\pi\cdot\frac{t^{-1}}{-1}\Big|_1^2=-\pi\cdot\frac{1}{t}\Big|_1^2=$$

$$=-\pi\left(\frac{1}{2}-1\right)=-\pi\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

Prof. Ovidiu Badescu